Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

72. BAND, 2. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 19. NOVEMBER 1959)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1959

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,

R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B

E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,

F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,

H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21 b.

Springer-Verlag OHG — Berlin-Wilmersdorf, Heidelberger Platz 3 — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

72. Band **Inhalt** 2. Heft

Seite

Heinz, E., Über die Differentialungleichung $0<\alpha\leqq rt-s^2\leqq\beta<\infty$ 107

Steinhaus, H., und K. Urbanik, Poissonsche Folgen 127

Morrey jr., Ch. B., Second Order Elliptic Equations in Several Variables and Hölder Continuity 146

Gilbarg, D., Some Hydrodynamic Applications of Function Theoretic Properties of Elliptic Equations 165

Nehari, Z., On a class of nonlinear integral equations 175

Malgrange, B., Sur une inégalité de F. Treves 184

Jarník, V., Eine Bemerkung über diophantische Approximationen 187

Rademacher, H., On the Phragmén-Lindelöf theorem and some applications . . 192

Heinz, E.
Math. Zeitschr. 72, 107–126 (1959)

Über die Differentialungleichung $0 < \alpha \leqq rt - s^2 \leqq \beta < \infty$

Leon Lichtenstein zum Gedächtnis

Von

Erhard Heinz[1])

Problemstellung

Es sei $z = z(x, y)$ eine in einer offenen Punktmenge Ω der xy-Ebene reelle, zweimal stetig differenzierbare Funktion, die der Differentialungleichung

$$\left\{ \begin{array}{c} rt - s^2 > 0 \\ (p = z_x,\ q = z_y;\ r = z_{xx},\ s = z_{xy},\ t = z_{yy}) \end{array} \right. \tag{1}$$

genügt. Außerdem sei

$$|z(x, y)| \leqq \delta < \infty \tag{2}$$

für $(x, y) \in \Omega$, und Ω_d bezeichne die Teilmenge aller Punkte von Ω, deren Abstand vom Rande von Ω eine positive Zahl d überschreitet. Bekanntlich gilt dann für $(x, y) \in \Omega_d$ die Ungleichung

$$\sqrt{p^2 + q^2} \leqq \frac{2\delta}{d}\ ^2). \tag{3}$$

Außerdem ist die Abbildung $(x, y) \to (p, q)$ eineindeutig, falls Ω als konvex vorausgesetzt wird.

Wenn man (1) durch die Differentialungleichung

$$0 < \alpha \leqq rt - s^2 \leqq \beta < \infty \tag{4}$$

ersetzt, so kann man über das Verhalten der ersten Ableitungen schärfere Aussagen machen, die über die triviale Abschätzung (3) hinausgehen. Das erste Resultat in dieser Richtung rührt von A. D. Alexandrow [*1*][3]) her, der u. a. zeigte: *Wenn die verallgemeinerte Gaußsche Krümmung einer konvexen Fläche zwischen zwei positiven Zahlen liegt, dann ist die Fläche glatt und enthält keine geradlinigen Strecken.* Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, aus den Ungleichungen (2) und (4) quantitative Abschätzungen für den Gradienten (p, q) der Fläche $z = z(x, y)$ zu gewinnen, die dem Alexandrowschen Theorem entsprechen. Die diesbezüglichen Resultate lassen sich folgendermaßen aussprechen:

[1]) Diese Arbeit wurde teilweise von einem Kontrakt des Office of Naval Research in Stanford University unterstützt.

[2]) Vgl. z. B. Hilfssatz 11 dieser Arbeit.

[3]) Vgl. dazu Pogorelow [*10*], Kap. II, § 1.

SATZ 1. *Es sei $z=z(x, y)$ eine in einer offenen Punktmenge Ω der xy-Ebene reelle, zweimal stetig differenzierbare Funktion, die den Ungleichungen (2) und (4) genügt. Ferner sei Ω_d die Teilmenge aller Punkte in Ω, deren Abstand vom Rande von Ω größer als eine positive Zahl d ist. Dann gilt für irgend zwei Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) von Ω_d die Abschätzung*

$$(5)\quad \begin{cases} \sqrt{(p(x_1, y_1) - p(x_0, y_0))^2 + (q(x_1, y_1) - q(x_0, y_0))^2} \\ \qquad \leqq \Gamma_1(\alpha, \beta, \delta, d)\left(\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}\right)^{\mu}. \end{cases}$$

Dabei ist $\mu = \sqrt{\alpha/\beta}$, und $\Gamma_1(\alpha, \beta, \delta, d)$ ist eine stetige positive Funktion für $0 < \alpha \leqq \beta$ und alle positiven Werte von δ und d.

SATZ 2. *Es sei $z=z(x, y)$ eine in einer offenen konvexen Punktmenge Ω der xy-Ebene reelle, zweimal stetig differenzierbare Funktion, die den Ungleichungen (2) und (4) genügt. Ferner sei (x_0, y_0) ein Punkt in Ω, dessen Abstand vom Rande von Ω größer als eine positive Zahl d ist.*

Dann besteht für jeden Punkt $(x, y) \in \Omega$ mit $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2>0$ die Ungleichung

$$(6)\quad \begin{cases} \left|\dfrac{(x - x_0)(p - p_0) + (y - y_0)(q - q_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}\right| \geqq \Gamma_2(\alpha, \beta, \delta, d)\left(\Lambda_d\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)\right)^{\nu} \\ \qquad (p_0 = p(x_0, y_0),\ q_0 = q(x_0, y_0);\ \nu = \sqrt{\beta/\alpha}). \end{cases}$$

Dabei ist $\Gamma_2(\alpha, \beta, \delta, d)$ eine stetige positive Funktion für $0 < \alpha \leqq \beta$ und alle positiven Werte von δ und d, und die Funktion $\Lambda_d(\varrho)$ ist durch die Gleichungen

$$(7)\quad \Lambda_d(\varrho) = \begin{cases} \varrho, & 0 \leqq \varrho \leqq \dfrac{d}{2} \\ \dfrac{d}{2}, & \dfrac{d}{2} \leqq \varrho < \infty \end{cases}$$

erklärt.

Aus (6) ergibt sich unmittelbar die folgende Ungleichung

$$(8)\quad \sqrt{(p - p_0) + (q - q_0)^2} \geqq \Gamma_2(\alpha, \beta, \delta, d)\left(\Lambda_d\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)\right)^{\nu}$$

für irgend zwei Punkte (x_0, y_0) und (x, y) in Ω_d, falls man Ω als konvex voraussetzt.

Satz 1 und Satz 2 können als Aussagen über die Lösungen der elliptischen Monge-Ampèreschen Differentialgleichung

$$(9)\quad rt - s^2 = E(x, y)$$

aufgefaßt werden, wobei die Funktion $E(x, y)$ durch die Ungleichung

$$(10)\quad 0 < \alpha \leqq E(x, y) \leqq \beta < \infty$$

eingeschränkt ist. Wie in [5] und [7] werden wir zum Beweis von Satz 1 und Satz 2 die zu (9) gehörigen charakteristischen Parameter (u, v) heranziehen. Diese sind in unserem Falle durch die Gleichung

$$(11)\quad r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = \lambda(du^2 + dv^2), \quad (\lambda \neq 0)$$

definiert und können auf Grund des Uniformisierungstheorems im Großen eingeführt werden. Es ist wohlbekannt, daß (9) einem elliptischen System von Differentialgleichungen erster Ordnung für x, y, p und q äquivalent ist, falls man diese Größen als Funktionen von u und v betrachtet. Die Hauptschwierigkeit beim Beweis der Ungleichungen (5) und (6) liegt in der Rückkehr von den Hilfsvariablen (u, v) zu den ursprünglichen Veränderlichen (x, y).

Um diesen Schritt auszuführen, werden wir zunächst in § 1 dieser Arbeit die erforderlichen Hilfssätze über quasikonforme Abbildungen und Abbildungen mit endlichem Dirichlet-Integral herleiten. Abgesehen von den wohlbekannten Hilfssätzen 1 und 2 werden die Beweise alle gegeben. In § 2 werden die Variablen x, y, p und q als Funktionen der charakteristischen Parameter (u, v) betrachtet. Insbesondere wird der Monge-Ampèreschen Gl. (9) eine einparametrige Schar eineindeutiger quasikonformer Abbildungen zugeordnet, deren maximale Dilatation durch die Größen α und β abgeschätzt werden kann. Anwendung dieser Resultate ergibt dann den Beweis von Satz 1 und Satz 2 im letzten Abschnitt dieser Arbeit.

§ 1. Hilfssätze über quasikonforme Abbildungen und Abbildungen mit endlichem Dirichlet-Integral

Es sei $\zeta=\zeta(w)$ $(w=u+iv;\ \zeta=\xi+i\eta)$ eine eineindeutige, stetig differenzierbare Abbildung eines Gebietes D auf ein Gebiet D^*. Im folgenden setzen wir stets voraus, daß die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)}$ in D nicht verschwindet. Mit den üblichen Bezeichnungen

$$\frac{\partial}{\partial w}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u}-i\frac{\partial}{\partial v}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{w}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u}+i\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

gilt dann $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)}=|\zeta_w|^2-|\zeta_{\overline{w}}|^2\neq 0$. Daher ist der Quotient $\frac{|\zeta_w|+|\zeta_{\overline{w}}|}{||\zeta_w|-|\zeta_{\overline{w}}||}$ wohldefiniert und wird als *Dilatation* der Abbildung $w\to\zeta$ im Punkte w bezeichnet. Eine Abbildung von D auf D^* ist *quasikonform*, wenn ihre Dilatation in D gleichmäßig beschränkt ist. Offenbar ist die Dilatation gegenüber konformen Transformationen der Variablen w und ζ invariant, und die zueinander inversen Abbildungen $w\to\zeta$ und $\zeta\to w$ haben in entsprechenden Punkten die gleiche Dilatation. Für unsere Zwecke genügt es, den Fall zu betrachten, wo die Funktionaldeterminante $|\zeta_w|^2-|\zeta_{\overline{w}}|^2$ immer positiv ist. Der folgende Hilfssatz, der im wesentlichen von C. B. Morrey [9][4]) herrührt, ist für unsere späteren Betrachtungen grundlegend:

Hilfssatz 1. *Die Funktion $\zeta=\zeta(w)$ bilde die Kreisscheibe $|w|<1$ eineindeutig und stetig auf die Kreisscheibe $|\zeta|<1$ ab mit $\zeta(0)=0$. Ferner sei $\zeta(w)$ einmal stetig differenzierbar und genüge den Differentialungleichungen*

$$|\zeta_w|-|\zeta_{\overline{w}}|>0 \tag{1.1}$$

[4]) Weitere Beweise und Literaturangaben bei Ahlfors [1], Finn-Serrin [4] und Mori [8]. Mori zeigte, daß $c(K)=16$ die bestmögliche Konstante ist, mit der die Ungleichung (1.3) gilt.

und

$$\frac{|\zeta_w| + |\zeta_{\bar{w}}|}{|\zeta_w| - |\zeta_{\bar{w}}|} \leqq K, \tag{1.2}$$

wobei K eine feste positive Zahl bedeutet. Dann ist die Funktion $\zeta(w)$ für $|w| \leqq 1$ stetig, und es gilt für $|w_1| \leqq 1$ und $|w_2| \leqq 1$ eine Abschätzung der Form

$$|\zeta(w_2) - \zeta(w_1)| \leqq c(K)\,|w_2 - w_1|^{1/K}. \tag{1.3}$$

Dabei ist $c(K)$ eine von der Abbildung $w \to \zeta(w)$ unabhängige, stetige Funktion von K, die für $1 \leqq K < \infty$ der Ungleichung $c(K) \geqq 1$ genügt.

Wenn wir (1.1) und (1.2) durch eine Ungleichung der Form

$$\iint\limits_{|w|<1} (|\zeta_u|^2 + |\zeta_v|^2)\, du\, dv \leqq N < \infty \tag{1.4}$$

ersetzen, so erhalten wir eine allgemeinere Klasse von Abbildungen, für die der folgende Hilfssatz[5]) gilt:

HILFSSATZ 2. *Es sei $\zeta = \zeta(w)$ eine eineindeutige, stetige Abbildung der Kreisscheibe $|w| < 1$ auf die Kreisscheibe $|\zeta| < 1$ mit $\zeta(0) = 0$. Außerdem sei die Funktion $\zeta(w)$ für $|w| < 1$ einmal stetig differenzierbar, und es gelte die Ungleichung* (1.4).

Dann ist $\zeta(w)$ für $|w| \leqq 1$ stetig, und es besteht für zwei Punkte w_1 und w_2 der Kreisscheibe $|w| \leqq 1$ mit $0 < |w_2 - w_1| < 1$ die Abschätzung

$$|\zeta(w_2) - \zeta(w_1)| \leqq 4 \sqrt{\frac{\pi N}{-\log|w_2 - w_1|}}. \tag{1.5}$$

Wir betrachten nun eineindeutige quasikonforme Abbildungen der Kreisscheibe $|w| < 1$ auf ein Bildgebiet D^*, welches in der Kreisscheibe $|\zeta| < 1$ enthalten ist. Zu diesem Zweck benötigen wir die beiden wohlbekannten Hilfssätze über analytische Funktionen[6]).

HILFSSATZ 3. *Es sei $\varphi(\zeta)$ eine für $|\zeta| < 1$ regulär-analytische Funktion mit $\varphi(\zeta) \neq 0$ und $|\varphi(\zeta)| \leqq 1$. Dann gilt für $|\zeta_1| < 1$ und $|\zeta| < 1$ die Ungleichung*

$$|\varphi(\zeta)| \leqq |\varphi(\zeta_1)|^{\frac{(1-|\zeta_1|)(1-|\zeta|)}{(1+|\zeta_1|)(1+|\zeta|)}}. \tag{1.6}$$

BEWEIS. Nach Voraussetzung ist die Funktion $\psi(\zeta) = -\log|\varphi(\zeta)|$ für $|\zeta| < 1$ harmonisch und nicht-negativ. Durch Anwendung der Harnackschen Ungleichung folgt daher

$$\frac{1-|\zeta|}{1+|\zeta|}\,\psi(0) \leqq \psi(\zeta) \leqq \frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}\,\psi(0), \qquad (|\zeta| < 1), \tag{1.7}$$

[5]) Vgl. z. B. [6], S. 252–253. Dort wird die zusätzliche Voraussetzung gemacht, daß $\zeta(w)$ für $|w| \leqq 1$ stetig ist und $|w_2 - w_1| < \frac{1}{4}$ gilt. Der loc. cit. gegebene Beweis macht jedoch keinen Gebrauch von der Stetigkeit der Funktion $\zeta(w)$ bei $|w| = 1$; ferner ist wegen

$$N \geqq \iint\limits_{|w|<1} (|\zeta_u|^2 + |\zeta_v|^2)\, du\, dv \geqq 2 \iint\limits_{|w|<1} \left|\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)}\right| du\, dv \geqq 2\pi$$

die Abschätzung (1.5) trivial für $\frac{1}{4} \leqq |w_2 - w_1| < 1$.

[6]) Vgl. PÓLYA-SZEGÖ [11], S. 140. Der Vollständigkeit halber führen wir die Beweise noch einmal an.

oder, was damit äquivalent ist,

$$|\varphi(0)|^{\frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}}\leqq|\varphi(\zeta)|\leqq|\varphi(0)|^{\frac{1-|\zeta|}{1+|\zeta|}}\quad(|\zeta|<1). \tag{1.8}$$

Dies ergibt

$$|\varphi(0)|\leqq|\varphi(\zeta_1)|^{\frac{1-|\zeta_1|}{1+|\zeta_1|}}. \tag{1.9}$$

Wenn wir dies in die rechte Seite von (1.8) einsetzen, so entsteht (1.6), womit die Behauptung bewiesen ist.

Hilfssatz 4. *Es sei $\Phi(\zeta)$ eine für $|\zeta|<1$ regulär-analytische, schlichte Funktion mit $\Phi(0)=0$ und $|\Phi(\zeta)|<1$. Dann gilt für $0<|\zeta_1|<1$ und $|\zeta|<1$ die Abschätzung*

$$|\Phi(\zeta)|\leqq|\zeta|\left|\frac{\Phi(\zeta_1)}{\zeta_1}\right|^{\frac{(1-|\zeta_1|)(1-|\zeta|)}{(1+|\zeta_1|)(1+|\zeta|)}}. \tag{1.10}$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist die Funktion

$$\varphi(\zeta)=\begin{cases}\dfrac{\Phi(\zeta)}{\zeta}, & \zeta\neq 0\\ \Phi'(0), & \zeta=0\end{cases} \tag{1.11}$$

in $|\zeta|<1$ regulär-analytisch, und es gilt $\varphi(\zeta)\neq 0$. Ferner hat man auf Grund des Schwarzschen Lemmas die Abschätzung $|\varphi(\zeta)|<1$ für $|\zeta|<1$. Daraus ergibt sich durch Anwendung von Hilfssatz 4 die Ungleichung (1.10), womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 5. *Es sei $f(w)$ eine für $|w|<1$ einmal stetig differenzierbare, schlichte Funktion mit $f(0)=0$ und $|f(w)|<1$. Außerdem genüge $f(w)$ den Differentialungleichungen*

$$|f_w|-|f_{\overline{w}}|>0 \tag{1.12}$$

und

$$\frac{|f_w|+|f_{\overline{w}}|}{|f_w|-|f_{\overline{w}}|}\leqq K \tag{1.13}$$

mit einer festen positiven Konstanten K. Dann gelten die Abschätzungen

$$|f(w)|\leqq c(K)\,|w|^{1/K},\quad(|w|<1) \tag{1.14}$$

und

$$|f(w)|\leqq c(K)^{\frac{1}{2}K}\left(\frac{|f(w_1)|}{|w_1|^K}\right)^{\frac{1}{2}c(K)^{-2K}(1-|w_1|)^K(1-|w|)^K}\quad(|w|<1;\ 0<|w_1|<1), \tag{1.15}$$

wobei $c(K)$ in Hilfssatz 1 erklärt ist.

Beweis. Es sei D^* das Bildgebiet der Kreisscheibe $|w|<1$ bei der Abbildung $w\to f(w)$. Nach dem Riemannschen Abbildungssatz gibt es eine eindeutig bestimmte regulär-analytische Funktion $\Phi(\zeta)$ mit $\Phi(0)=0$ und $\Phi'(0)>0$, die die Kreisscheibe $|\zeta|<1$ konform auf D^* abbildet. Es sei nun Φ^{-1} die zu Φ inverse Funktion. Dann erfüllt offenbar die Funktion $\zeta(w)=\Phi^{-1}(f(w))$ alle Voraussetzungen von Hilfssatz 1, und es gilt die Darstellung

$$f(w)=\Phi(\zeta(w)),\quad(|w|<1). \tag{1.16}$$

Indem wir zuerst das Schwarzsche Lemma auf die Funktion $\Phi(\zeta)$ und dann Hilfssatz 1 auf die quasikonforme Abbildung $\zeta=\zeta(w)$ anwenden, erhalten wir

die Ungleichung

$$|f(w)| \leqq |\zeta(w)| \leqq c(K)\,|w|^{1/K}. \tag{1.17}$$

Damit ist (1.14) bewiesen.

Um (1.15) zu beweisen, bemerken wir zunächst, daß auf Grund von (1.16) und Hilfssatz 4 für $|w|<1$ und $0<|w_1|<1$ die Ungleichung

$$|f(w)| \leqq |\zeta(w)| \cdot \left|\frac{f(w_1)}{\zeta(w_1)}\right|^{\frac{(1-|\zeta(w_1)|)\,(1-|\zeta(w)|)}{(1+|\zeta(w_1)|)\,(1+|\zeta(w)|)}} \tag{1.18}$$

besteht. Wir schätzen nun die rechte Seite von (1.18) nach oben ab, indem wir Hilfssatz 1 auf die zu $\zeta(w)$ inverse Funktion $w(\zeta)$ anwenden. Zunächst gilt

$$|w(\zeta_2) - w(\zeta_1)| \leqq c(K)\,|\zeta_2 - \zeta_1|^{1/K} \tag{1.19}$$

für $|\zeta_1| \leqq 1$ und $|\zeta_2| \leqq 1$, oder, was damit äquivalent ist,

$$|\zeta(w_2) - \zeta(w_1)| \geqq c(K)^{-K}\,|w_2 - w_1|^K \tag{1.20}$$

für $|w_1| \leqq 1$ und $|w_2| \leqq 1$. Setzen wir hierin $w_1 = 0$, so folgt

$$|\zeta(w)| \geqq c(K)^{-K}\,|w|^K \quad \text{für} \quad |w| \leqq 1. \tag{1.21}$$

Es sei nun $w_1 \neq 0$. Dann gibt es offenbar eine komplexe Zahl w_2 mit $|w_2| = 1$ und $\zeta(w_2) = \dfrac{\zeta(w_1)}{|\zeta(w_1)|}$. Durch Anwendung von (1.20) folgt

$$1 - |\zeta(w_1)| = |\zeta(w_2) - \zeta(w_1)| \geqq c(K)^{-K}\,|w_2 - w_1|^K \geqq c(K)^{-K}\,(1 - |w_1|)^K \tag{1.22}$$

und entsprechend

$$1 - |\zeta(w)| \geqq c(K)^{-K}\,(1 - |w|)^K \quad \text{für} \quad |w| \leqq 1. \tag{1.23}$$

Wenden wir nun sukzessiv die Ungleichungen (1.22), (1.23) und (1.21) an und berücksichtigen (1.17), so gewinnen wir aus (1.18) für $|w|<1$ und $0<|w_1|<1$ die folgende Abschätzung:

$$\left\{\begin{aligned} |f(w)| &\leqq \left|\frac{f(w_1)}{\zeta(w_1)}\right|^{\frac{1}{4}c(K)^{-2K}(1-|w_1|)^K(1-|w|)^K} \\ &\leqq \left(c(K)^K \cdot \frac{|f(w_1)|}{|w_1|^K}\right)^{\frac{1}{4}c(K)^{-2K}(1-|w_1|)^K(1-|w|)^K} \\ &\leqq c(K)^{\frac{1}{4}K} \cdot \left(\frac{|f(w_1)|}{|w_1|^K}\right)^{\frac{1}{4}c(K)^{-2K}(1-|w_1|)^K(1-|w|)^K}, \end{aligned}\right. \tag{1.24}$$

die mit (1.15) identisch ist. Damit ist Hilfssatz 5 bewiesen.

§ 2. Charakteristische Parameter

In diesem Paragraphen betrachten wir die Variablen $x, y, p = z_x$ und $q = z_y$ als Funktionen der zur Differentialgleichung $rt - s^2 = E(x, y)$ gehörigen charakteristischen Parameter (u, v), wobei wir voraussetzen, daß die Funktionen $E(x, y)$ der Ungleichung $0 < \alpha \leqq E(x, y) \leqq \beta < \infty$ genügt. Im Gegensatz zu [5] und [7] sind alle hierbei auftretenden Differentialgleichungen von erster Ordnung[7]). Insbesondere werden wir der Monge-Ampèreschen Gleichung $rt - s^2 = E(x, y)$ eine einparametrige Schar schlichter quasikonformer

[7]) Für den hyperbolischen Fall vgl. COURANT-HILBERT [3], Kap. V.

Abbildungen zuordnen, auf die die Resultate von § 1 anwendbar sind. Dies geschieht in den nächsten zwei Hilfssätzen.

HILFSSATZ 6. *Es sei* $z=z(x,y)$ *eine in der Kreisscheibe* $\Delta=\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqq R^2\}$ *reelle, analytische Funktion (d. h.* $z(x,y)$ *ist eine reguläre Potenzreihe in* x, y *mit reellen Koeffizienten in der Umgebung eines jeden Punktes in* Δ*). Außerdem sei*

$$\begin{cases} rt-s^2=E(x,y)>0 \\ (p=z_x,\ q=z_y;\ r=z_{xx},\ s=z_{xy},\ t=z_{yy}) \end{cases} \tag{2.1}$$

für $(x,y)\in\Delta$. *Dann gibt es zwei reelle Funktionen* $x(u,v)$ *und* $y(u,v)$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $x=x(u,v)$ *und* $y=y(u,v)$ *bilden die Einheitskreisscheibe* $|w|\leqq 1$ $(w=u+iv)$ *eineindeutig und stetig auf* Δ *ab mit* $x(0,0)=x_0$ *und* $y(0,0)=y_0$.

(ii) *Die Funktionen* $x(u,v)$, $y(u,v)$; $p=p\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ *und* $q=q\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ *sind für* $|w|<1$ *einmal stetig differenzierbar*[8]) *und genügen den Differentialgleichungen*

$$x_u=\frac{q_v}{\sqrt{E}},\qquad x_v=-\frac{q_u}{\sqrt{E}}; \tag{2.2}$$

und

$$y_u=-\frac{p_v}{\sqrt{E}},\qquad y_v=\frac{p_u}{\sqrt{E}}. \tag{2.3}$$

(iii) *Für* $|w|<1$ *besteht die Ungleichung*

$$x_u y_v-x_v y_u\neq 0, \tag{2.4}$$

und es gelten die Beziehungen

$$\frac{r}{\sqrt{E}}=\frac{y_u^2+y_v^2}{x_u y_v-x_v y_u},\quad \frac{s}{\sqrt{E}}=-\frac{x_u y_u+x_v y_v}{x_u y_v-x_v y_u},\quad \frac{t}{\sqrt{E}}=\frac{x_u^2+x_v^2}{x_u y_v-x_v y_u}. \tag{2.5}$$

BEWEIS. Da nach Voraussetzung die zur Gl. (2.1) gehörige charakteristische Differentialform

$$X=r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2 \tag{2.6}$$

positiv- oder negativ-definit ist und analytische Koeffizienten besitzt, so ergibt sich aus dem Satz von CAUCHY-KOWALEWSKI und dem Uniformisierungstheorem[9]) die Existenz zweier reeller Funktionen $u=u(x,y)$ und $v=v(x,y)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i') $u=u(x,y)$ und $v=v(x,y)$ bilden Δ eineindeutig und stetig auf die Kreisscheibe $|w|\leqq 1$ ab mit $u(x_0,y_0)=v(x_0,y_0)=0$.

(ii') Die Funktionen $u(x,y)$ und $v(x,y)$ sind für $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<R^2$ analytisch und genügen dem zur Metrik X gehörigen Beltramischen System

$$\begin{cases} u_x=\dfrac{-s\,v_x+r\,v_y}{\sqrt{rt-s^2}} \\ u_y=\dfrac{-t\,v_x+s\,v_y}{\sqrt{rt-s^2}} \end{cases} \tag{2.7}$$

[8]) Sie sind sogar analytisch für $|w|\leqq 1$.

[9]) Siehe z. B. [7].

(iii') Für $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<R^2$ gilt $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0$.

(2.7) kann offenbar auch in der Form

$$\text{(2.8)} \qquad \begin{cases} v_x = \dfrac{s\,u_x - r\,u_y}{\sqrt{rt-s^2}} \\ v_y = \dfrac{t\,u_x - s\,u_y}{\sqrt{rt-s^2}} \end{cases}$$

geschrieben werden. Wegen (i') und (iii') sind die inversen Funktionen $x(u, v)$ und $y(u, v)$ für $|w|<1$ analytisch, und es gilt (2.4). Ferner ist

$$\text{(2.9)} \qquad u_x = \delta\, y_v, \quad u_y = -\delta\, x_v; \quad v_x = -\delta\, y_u, \quad v_y = \delta\, x_u$$

mit $\delta = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$. Setzen wir diese Ausdrücke in (2.7) und (2.8) ein und berücksichtigen (2.1) ,so erhalten wir

$$\text{(2.10)} \qquad \begin{cases} y_v = \dfrac{s\,y_u + r\,x_u}{\sqrt{rt-s^2}} = \dfrac{p_u}{\sqrt{E}} \\ -x_v = \dfrac{t\,y_u + s\,x_u}{\sqrt{rt-s^2}} = \dfrac{q_u}{\sqrt{E}} \end{cases}$$

und

$$\text{(2.11)} \qquad \begin{cases} -y_u = \dfrac{s\,y_v + r\,x_v}{\sqrt{rt-s^2}} = \dfrac{p_v}{\sqrt{E}} \\ x_u = \dfrac{t\,y_v + s\,x_v}{\sqrt{rt-s^2}} = \dfrac{q_v}{\sqrt{E}} \end{cases}$$

was mit (2.2) und (2.3) identisch ist. Durch Elimination der Größen r, s, t aus den Gleichungssystemen (2.10) und (2.11) ergeben sich schließlich die Darstellungen (2.5), womit der Hilfssatz bewiesen ist.

HILFSSATZ 7. *Es seien die Voraussetzungen von Hilfssatz 6 erfüllt. Außerdem gelten für $(x, y)\in\Delta$ die Ungleichungen*

$$\text{(2.12)} \qquad 0<\alpha\leqq E(x,y)\leqq\beta<\infty$$

und

$$\text{(2.13)} \qquad (p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}\leqq\gamma<\infty,$$

und Θ sei ein reeller Parameter. Dann ist die Funktion[10])

$$\text{(2.14)} \qquad \begin{cases} f(w;\Theta) = \dfrac{\sqrt{\alpha\beta}\,((x-x_0)\cos\Theta+(y-y_0)\sin\Theta)+i\,((q-q_0)\cos\Theta-(p-p_0)\sin\Theta)}{\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}} \\ (p_0=p(x_0,y_0),\ q_0=q(x_0,y_0)) \end{cases}$$

in der Kreisscheibe $|w|<1$ schlicht, und es ist

$$\text{(2.15)} \qquad f(0;\Theta)=0,$$

und

$$\text{(2.16)} \qquad |f(w;\Theta)|\leqq 1.$$

[10]) Hierbei bedeuten $x=x(u,v)$ und $y=y(u,v)$ die in Hilfssatz 6 erklärten Abbildungsfunktionen, und die Größen p und q sind als Funktionen der Variablen (u, v) durch die Gleichungen $p=p(x(u,v), y(u,v))$ und $q=q(x(u,v), y(u,v))$ definiert.

Außerdem ist $f(w;\Theta)$ für $|w|<1$ einmal stetig differenzierbar und genügt den Differentialungleichungen

$$|f_w|-|f_{\bar w}|>0, \tag{2.17}$$

und

$$\frac{|f_w|+|f_{\bar w}|}{|f_w|-|f_{\bar w}|}\leqq\sqrt[4]{\frac{\beta}{\alpha}}. \tag{2.18}$$

Beweis. Die Gl. (2.15) ist auf Grund der Definition von $f(w;\Theta)$ evident. Ferner gelten für $|w|<1$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned}|f(w;\Theta)| &= \frac{\sqrt{\sqrt{\alpha\beta}((x-x_0)\cos\Theta+(y-y_0)\sin\Theta)^2+((q-q_0)\cos\Theta-(p-p_0)\sin\Theta)^2}}{\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}}\\ &\leqq \frac{\sqrt{\sqrt{\alpha\beta}((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)+((p-p_0)^2+(q-q_0)^2)}}{\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}}\\ &\leqq \frac{\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2(p_0^2+q_0^2+p^2+q^2)}}{\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}}\leqq 1.\end{aligned}$$

Um (2.17) und (2.18) zu beweisen, bemerken wir zunächst, daß wegen (2.2) und (2.3) für jeden reellen Wert von Θ die Differentialgleichungen

$$\begin{cases}(x\cos\Theta+y\sin\Theta)_u=\dfrac{(q\cos\Theta-p\sin\Theta)_v}{\sqrt{E(x,y)}}\\ (x\cos\Theta+y\sin\Theta)_v=-\dfrac{(q\cos\Theta-p\sin\Theta)_u}{\sqrt{E(x,y)}}\end{cases} \tag{2.20}$$

erfüllt sind. Daraus ergibt sich

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{E(x,y)}}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}\sqrt[4]{\alpha\beta}\,((x-x_0)\cos\Theta+(y-y_0)\sin\Theta)_{\bar w}+i\,((q-q_0)\cos\Theta-\\ -(p-p_0)\sin\Theta)_{\bar w}=0\end{cases} \tag{2.21}$$

mit $p_0=p(x_0,y_0)$ und $q_0=q(x_0,y_0)$. Also genügt die Funktion $f(w;\Theta)$ der Differentialgleichung

$$f_{\bar w}=\frac{1-\dfrac{\sqrt{E(x,y)}}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}}{1+\dfrac{\sqrt{E(x,y)}}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}}\bar f_{\bar w}. \tag{2.22}$$

Aus (2.22) folgt

$$|f_{\bar w}|=\frac{\left|1-\dfrac{\sqrt{E(x,y)}}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}\right|}{1+\dfrac{\sqrt{E(x,y)}}{\sqrt{\alpha\beta}}}|f_w|, \tag{2.23}$$

sowie

$$|f_w|-|f_{\bar w}|=\frac{\left(1+\dfrac{\sqrt{E(x,y)}}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}\right)-\left|1-\dfrac{\sqrt{E(x,y)}}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}\right|}{1+\dfrac{\sqrt{E(x,y)}}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}}|f_w|\geqq 0. \tag{2.24}$$

Angenommen, es sei $|f_w| - |f_{\bar{w}}| = 0$. Dann gilt wegen (2.24) die Gleichung $f_w = f_{\bar{w}} = 0$ oder $f_u = f_v = 0$. Hieraus folgt

$$\left\{ \begin{array}{l} x_u \cos\Theta + y_u \sin\Theta = 0 \\ x_v \cos\Theta + y_v \sin\Theta = 0, \end{array} \right. \tag{2.25}$$

was wegen $x_u y_v - x_v y_u \neq 0$ ($|w| < 1$) unmöglich ist. Wir wollen nun die maximale Dilatation der Abbildung $w \to f(w; \Theta)$ abschätzen. Wegen (2.23) gilt für $|w| < 1$ die Ungleichung

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{|f_w| + |f_{\bar{w}}|}{|f_w| - |f_{\bar{w}}|} = \dfrac{\left(1 + \dfrac{\sqrt{E(x,y)}}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}\right) + \left|1 - \dfrac{\sqrt{E(x,y)}}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}\right|}{\left(1 + \dfrac{\sqrt{E(x,y)}}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}\right) - \left|1 - \dfrac{\sqrt{E(x,y)}}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}\right|} \\ \qquad \leqq \max\left(\dfrac{\sqrt{E(x,y)}}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}, \dfrac{\sqrt[4]{\alpha\beta}}{\sqrt{E(x,y)}}\right). \end{array} \right. \tag{2.26}$$

Unter Berücksichtigung von (2.12) erhalten wir hieraus die Abschätzung

$$\frac{|f_w| + |f_{\bar{w}}|}{|f_w| - |f_{\bar{w}}|} \leqq \sqrt[4]{\frac{\beta}{\alpha}}. \tag{2.27}$$

Der Beweis des Hilfssatzes ist erbracht, wenn wir zeigen, daß die Abbildung $w \to f(w; \Theta)$ für jeden reellen Wert von Θ eineindeutig ist. Zu diesem Zweck führen wir die Hilfsveränderlichen ξ, η durch die Gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = (x(u,v) - x_0)\cos\Theta + (y(u,v) - y_0)\sin\Theta \\ \eta = -(x(u,v) - x_0)\sin\Theta + (y(u,v) - y_0)\cos\Theta \end{array} \right. \tag{2.28}$$

ein. Wegen der Eineindeutigkeit der Abbildung $(u, v) \to (\xi, \eta)$ genügt es zu zeigen, daß f eine schlichte Funktion der Variablen ξ, η darstellt. Offenbar kann f durch ξ und η folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(w;\Theta) = f^*(\xi, \eta, ;\Theta) = (R^2\sqrt{\alpha\beta} + 2\gamma^2)^{-\frac{1}{2}}\{\xi\sqrt[4]{\alpha\beta} + \\ \quad + i[(q(x_0 + \xi\cos\Theta - \eta\sin\Theta,\ y_0 + \xi\sin\Theta + \eta\cos\Theta) - q_0)\cos\Theta - \\ \quad - (p(x_0 + \xi\cos\Theta - \eta\sin\Theta,\ y_0 + \xi\sin\Theta + \eta\cos\Theta) - p_0)\sin\Theta]\}. \end{array} \right. \tag{2.29}$$

Auf Grund von (2.12) gelten dann für $\xi^2 + \eta^2 < R^2$ und jeden reellen Wert von Θ die Beziehungen

$$Re\, f^*(\xi, \eta, ; \Theta) = (R^2\sqrt{\alpha\beta} + 2\gamma^2)^{-\frac{1}{2}}\sqrt[4]{\alpha\beta}\cdot\xi \tag{2.30}$$

und

$$\frac{\partial \operatorname{Im} f^*(\xi,\eta;\Theta)}{\partial\eta} = (R^2\sqrt{\alpha\beta} + 2\gamma^2)^{-\frac{1}{2}}(t\cos^2\Theta - 2s\cos\Theta\sin\Theta + r\sin^2\Theta) \neq 0. \tag{2.31}$$

Aus (2.30) und (2.31) folgt, daß die Funktion $f^*(\xi, \eta; \Theta)$ in der Kreisscheibe $\xi^2 + \eta^2 < R^2$ schlicht ist. Damit ist der Hilfssatz 7 bewiesen.

Wir wollen nun zeigen, daß die in Hilfssatz 6 erklärten Abbildungsfunktionen $x(u, v)$ und $y(u, v)$ ein endliches Dirichlet-Integral besitzen. Dies ist ein Spezialfall eines allgemeineren Satzes über Monge-Ampèresche Gleichungen (vgl. [7], Hilfssatz 4). Zur Bequemlichkeit des Lesers führen wir den auf unseren Fall spezialisierten Beweis noch einmal an.

Hilfssatz 8. *Es seien die Voraussetzungen von Hilfssatz 6 erfüllt. Außerdem sei*

$$E(x, y)\geqq\alpha>0 \tag{2.32}$$

und

$$(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}\leqq\gamma<\infty \tag{2.33}$$

für $(x, y)\in\mathfrak{J}$. *Dann gilt für die Abbildungsfunktionen* $x(u, v)$ *und* $y(u, v)$ *die Ungleichung*

$$\iint\limits_{|w|<1}(x_u^2+y_u^2+x_v^2+y_v^2)\,du\,dv\leqq\frac{2\pi\gamma R}{\sqrt{\alpha}} \tag{2.34}$$

Beweis. Es sei $0<\varrho<1$. Dann läßt sich nach Hilfssatz 6, Behauptung (i), eine positive Zahl $R_1=R_1(\varrho)<R$ so bestimmen, daß das Bildgebiet D^* der Kreisscheibe $D=\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<R_1^2\}$ bei der inversen Abbildung $(x, y)\to(u, v)$ die Kreisscheibe $|w|\leqq\varrho$ enthält. Zur Abkürzung setzen wir $\dot{D}=\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R_1^2\}$. Aus den Gln. (2.5) folgt

$$\frac{x_u^2+y_u^2+x_v^2+y_v^2}{|x_u y_v-x_v y_u|}=\varepsilon\frac{r+t}{\sqrt{E}} \tag{2.35}$$

mit $\varepsilon=\pm1$. Daher wird

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{|w|\leqq\varrho}(x_u^2+y_u^2+x_v^2+y_v^2)\,du\,dv\leqq\iint\limits_{D^*}(x_u^2+y_u^2+x_v^2+y_v^2)\,du\,dv\\
&\quad=\varepsilon\iint\limits_{D}\frac{r+t}{\sqrt{E}}\,dx\,dy\leqq\alpha^{-\frac{1}{2}}\left|\iint\limits_{D}(r+t)\,dx\,dy\right|\\
&\quad\leqq\alpha^{-\frac{1}{2}}\left|\int\limits_{\dot{D}}(-q\,dx+p\,dy)\right|\leqq\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}\int\limits_{\dot{D}}(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad=\frac{2\pi\gamma R_1}{\sqrt{\alpha}}\leqq\frac{2\pi\gamma R}{\sqrt{\alpha}}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Lassen wir hierin ϱ gegen 1 streben, so erhalten wir die Abschätzung (2.34), womit der Hilfssatz bewiesen ist.

§ 3. Abschätzungen für die Funktionen p und q

Wir sind jetzt in der Lage, die Hauptresultate dieser Arbeit zu beweisen (Satz 1 und Satz 2). Diese können durch elementare Betrachtungen aus dem folgenden Hilfssatz abgeleitet werden:

HILFSSATZ 9. *Es sei $z=z(x, y)$ eine in der Kreisscheibe*

$$\Delta=\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<R^2\}$$

reelle, zweimal stetig differenzierbare Funktion, die der Differentialungleichung

$$0<\alpha\leqq rt-s^2\leqq\beta<\infty \tag{3.1}$$

genügt. Außerdem sei

$$(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}\leqq\gamma<\infty \tag{3.2}$$

für $(x, y)\in\Delta$. Setzen wir dann zur Abkürzung $p_0=p(x_0, y_0)$ und $q_0=q(x_0, y_0)$, so gilt für $(x, y)\in\Delta$ eine Abschätzung der Form

$$\begin{cases} |(x-x_0)(p-p_0)+(y-y_0)(q-q_0)|\geqq \\ \geqq\Gamma(\alpha,\beta,\gamma,R)\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}+\sqrt{(p-p_0)^2+(q-q_0)^2}\right)^{1+\nu}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Dabei ist $\nu=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, und $\Gamma(\alpha,\beta,\gamma,R)$ ist eine stetige, positive Funktion für $0<\alpha\leqq\beta$ und alle positiven Werte von γ und R.

BEWEIS. Auf Grund des Weierstraßschen Approximationssatzes und der Stetigkeit der Funktionen ν und Γ genügt es offenbar, die Ungleichung (3.3) unter der zusätzlichen Voraussetzung zu beweisen, daß $z(x, y)$ ein Polynom ist. Setzen wir

$$rt-s^2=E(x, y), \tag{3.4}$$

so sind alle Voraussetzungen der Hilfssätze 6—8 erfüllt. Unser erstes Ziel besteht darin, geeignete Abschätzungen für die in Hilfssatz 7 definierte Funktion $f(w;\Theta)$ zu gewinnen. Zu diesem Zweck betrachten wir zunächst die Funktion

$$\zeta(w)=\frac{(x(u, v)-x_0)+i(y(u, v)-y_0)}{R}. \tag{3.5}$$

Nach Hilfssatz 8 ist

$$\iint\limits_{|w|<1}(|\zeta_u|^2+|\zeta_v|^2)\,du\,dv\leqq\frac{2\pi\gamma}{R\sqrt{\alpha}}=N. \tag{3.6}$$

Da außerdem $\zeta=\zeta(w)$ den Einheitskreis $|w|=1$ eineindeutig und stetig auf den Einheitskreis $|\zeta|=1$ abbildet, so gibt es eine reelle Zahl η mit $\zeta(e^{i\eta})=e^{i\Theta}$. Durch Anwendung von Hilfssatz 2 erhalten wir für $0<\varrho<1$ die Ungleichung

$$|\zeta(\varrho e^{i\eta})-e^{i\Theta}|\leqq 4\sqrt{\frac{\pi N}{-\log(1-\varrho)}}. \tag{3.7}$$

Setzen wir hierin

$$\varrho=\varrho(\alpha,\gamma,R)=1-e^{-64\pi N}, \tag{3.8}$$

so erhalten wir die Abschätzung

$$|\zeta(\varrho e^{i\eta})-e^{i\Theta}|\leqq\tfrac{1}{2}. \tag{3.9}$$

Hieraus folgt

$$(3.10)\quad \begin{cases} |(x(\varrho e^{i\eta})-x_0)\cos\Theta+(y(\varrho e^{i\eta})-y_0)\sin\Theta| \\ =|R+(x(\varrho e^{i\eta})-x_0-R\cos\Theta)\cos\Theta+(y(\varrho e^{i\eta})-y_0-R\sin\Theta)\sin\Theta| \\ \geqq R-\sqrt{(x(\varrho e^{i\eta})-x_0-R\cos\Theta)^2+(y(\varrho e^{i\eta})-y_0-R\sin\Theta)^2} \\ =R(1-|\zeta(\varrho e^{i\eta})-e^{i\Theta}|)\geqq\tfrac{1}{2}R. \end{cases}$$

Mit $w^*=\varrho(\alpha,\gamma,R)\,e^{i\eta}$ wird dann

$$(3.11)\qquad 1-|w^*|=e^{-64\pi N}$$

und

$$(3.12)\quad \begin{cases} |f(w^*;\Theta)|\geqq\dfrac{\sqrt[4]{\alpha\beta}}{\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}}\,|(x(\varrho e^{i\eta})-x_0)\cos\Theta+(y(\varrho e^{i\eta})-y_0)\sin\Theta| \\ \qquad\geqq\dfrac{R\sqrt[4]{\alpha\beta}}{2\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\dfrac{2\gamma^2}{R^2\sqrt{\alpha\beta}}}}\,. \end{cases}$$

Aus Hilfssatz 7 ergibt sich, daß die Funktion $f(w;\Theta)$ alle Voraussetzungen von Hilfssatz 5 mit $K=\sqrt[4]{\beta/\alpha}$ erfüllt. Daraus, sowie aus (1.15), (3.11) und (3.12), erhalten wir für $0<|w|<1$ die Ungleichung

$$(3.13)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{1+\dfrac{2\gamma^2}{R^2\sqrt{\alpha\beta}}}}\leqq|f(w^*;\Theta)|\leqq \\ \qquad\qquad\leqq c(K)^{\frac{1}{4}K}\left(\dfrac{|f(w;\Theta)|}{|w|^K}\right)^{4^{-1}c(K)^{-2K}e^{-64\pi NK}(1-|w|)^K} \end{cases}$$

also

$$(3.14)\qquad \frac{|f(w;\Theta)|}{|w|^K}\geqq\left(\frac{c(K)^{-\frac{1}{4}K}}{2\sqrt{1+\dfrac{2\gamma^2}{R^2\sqrt{\alpha\beta}}}}\right)^{4\,c(K)^{2K}e^{64\pi NK}(1-|w|)^{-K}}$$

für $0<|w|<1$.

Es sei nun $|w|\leqq\frac{1}{2}$. Dann folgt aus (3.14) die Abschätzung

$$(3.15)\qquad |f(w;\Theta)|\geqq\left(\frac{c(K)^{-\frac{1}{4}K}}{2\sqrt{1+\dfrac{2\gamma^2}{R^2\sqrt{\alpha\beta}}}}\right)^{4\,c(K)^{2K}e^{64\pi NK}\cdot 2^K}\cdot|w|^K.$$

Ferner gilt wegen der Eineindeutigkeit der Abbildung $w\to f(w;\Theta)$ für $\frac{1}{2}\leqq|w|<1$ die Ungleichung

$$(3.16)\qquad |f(w;\Theta)|\geqq 2^{-K}\left(\frac{c(K)^{-\frac{1}{4}K}}{2\sqrt{1+\dfrac{2\gamma^2}{R^2\sqrt{\alpha\beta}}}}\right)^{4\,c(K)^{2K}e^{64\pi NK}2^K}\cdot|w|^K.$$

Aus (3.15) und (3.16) ergibt sich

$$(3.17)\qquad |f(w;\Theta)|\geqq\Gamma_-(\alpha,\beta,\gamma,R)\,|w|^K$$

mit

$$K=\sqrt[4]{\frac{\beta}{\alpha}} \tag{3.18}$$

und

$$\Gamma_-(\alpha,\beta,\gamma,R)=2^{-K}\left(\frac{c(K)^{-\frac{1}{4}K}}{2\sqrt{1+\frac{2\gamma^2}{R^2\sqrt{\alpha\beta}}}}\right)^{4\,c(K)^{2K}\,2^K\,e^{64\,\pi\,N\,K}}<1. \tag{3.19}$$

Ferner ist auf Grund von (1.14) für $|w|<1$ und alle reellen Werte von Θ die Ungleichung

$$f(w;\Theta)\leqq\Gamma_+(\alpha,\beta)\,w^{\frac{1}{K}} \tag{3.20}$$

erfüllt, wobei $\Gamma_+(\alpha,\beta)$ durch die Gleichung

$$\Gamma_+(\alpha,\beta)=c\left(\sqrt[4]{\frac{\beta}{\alpha}}\right)\geqq 1 \tag{3.21}$$

definiert ist. Offenbar sind Γ_+ und Γ_- stetige positive Funktionen für $0<\alpha\leqq\beta$ und alle positiven Werte von γ und R.

Es sei nun (x_1, y_1) ein beliebiger Punkt in Δ mit $(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2>0$, und es werde zur Abkürzung $p_1=p(x_1, y_1)$ und $q_1=q(x_1, y_1)$ gesetzt. Ferner sei $w_1=u_1+iv_1$ derjenige Punkt der Kreisscheibe $|w|<1$, der bei der Abbildung $(u, v)\to(x, y)$ in den Punkt (x_1, y_1) übergeführt wird. Offenbar ist $w_1\neq 0$. Aus (3.17) und (3.20) folgt dann, daß für alle reellen Werte von Θ die Ungleichungen

$$\left\{\begin{aligned}&\sqrt{\sqrt{\alpha\beta}\,\big((x_1-x_0)\cos\Theta+(y_1-y_0)\sin\Theta\big)^2+\big((q_1-q_0)\cos\Theta-(p_1-p_0)\sin\Theta\big)^2}\geqq\\&\qquad\geqq\Gamma_-(\alpha,\beta,\gamma,R)\,\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}\,|w_1|^K>0\end{aligned}\right. \tag{3.22}$$

und

$$\left\{\begin{aligned}&\sqrt{\sqrt{\alpha\beta}\,\big((x_1-x_0)\cos\Theta+(y_1-y_0)\sin\Theta\big)^2+\big((q_1-q_0)\cos\Theta-(p_1-p_0)\sin\Theta\big)^2}\leqq\\&\qquad\leqq\Gamma_+(\alpha,\beta)\,\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}\,|w_1|^{\frac{1}{K}}\end{aligned}\right. \tag{3.23}$$

erfüllt sind. Insbesondere ist

$$\left\{\begin{aligned}&\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}+\sqrt{(p_1-p_0)^2+(q_1-q_0)^2}\leqq\\&\qquad\leqq\Gamma_+(\alpha,\beta)\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}\right)\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}\cdot|w_1|^{\frac{1}{K}}.\end{aligned}\right. \tag{3.24}$$

Wählt man $\Theta=\Theta'$ so daß die Gleichungen

$$\cos\Theta'=\frac{y_1-y_0}{\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}} \tag{3.25}$$

und

$$\sin\Theta'=-\frac{x_1-x_0}{\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}} \tag{3.26}$$

gelten, dann ergibt sich aus (3.22) die Abschätzung

$$\left\{\begin{aligned}&|(x_1-x_0)(p_1-p_0)+(y_1-y_0)(q_1-q_0)|\geqq\\&\geqq\Gamma_-(\alpha,\beta,\gamma,R)\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}\cdot\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\cdot|w_1|^K>0.\end{aligned}\right. \tag{3.27}$$

Insbesondere wird

$$(p_1-p_0)^2+(q_1-q_0)^2>0. \tag{3.28}$$

Es sei nun Θ'' eine reelle Zahl mit

$$\cos\Theta''=\frac{p_1-p_0}{\sqrt{(p_1-p_0)^2+(q_1-q_0)^2}} \tag{3.29}$$

und

$$\sin\Theta''=\frac{q_1-q_0}{\sqrt{(p_1-p_0)^2+(q_1-q_0)^2}}. \tag{3.30}$$

Setzen wir dann $\Theta=\Theta''$ in (3.22), so erhalten wir die Ungleichung

$$\left\{\begin{aligned}&|(x_1-x_0)(p_1-p_0)+(y_1-y_0)(q_1-q_0)|\geqq\\&\geqq\frac{\Gamma_-(\alpha,\beta,\gamma,R)\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}\cdot\sqrt{(p_1-p_0)^2+(q_1-q_0)^2}\cdot|w_1|^K.\end{aligned}\right. \tag{3.31}$$

Aus (3.27) und (3.31) entnimmt man die Abschätzung

$$\left\{\begin{aligned}&|(x_1-x_0)(p_1-p_0)+(y_1-y_0)(q_1-q_0)|\geqq\\&\geqq\frac{\Gamma_-(\alpha,\beta,\gamma,R)\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}-2\gamma^2}}{2(1+\sqrt[4]{\alpha\beta})}\left(\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}+\right.\\&\left.+\sqrt{(p_1-p_0)^2+(q_1-q_0)^2}\right)|w_1|^K.\end{aligned}\right. \tag{3.32}$$

Um die Größe $|w_1|^K$ aus (3.32) zu eliminieren, bemerken wir zunächst, daß auf Grund von (3.24) die Ungleichung

$$\left\{\begin{aligned}&|w_1|^K\geqq\left[\Gamma_+(\alpha,\beta)\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}\right)\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}\right]^{-K^2}\times\\&\times\left(\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}+\sqrt{(p_1-p_0)^2+(q_1-q_0)^2}\right)^{K^2}\end{aligned}\right. \tag{3.33}$$

besteht. Daraus, sowie aus (3.32), folgt aber die Abschätzung

$$\left\{\begin{aligned}&|(x_1-x_0)(p_1-p_0)+(y_1-y_0)(q_1-q_0)|\geqq\\&\geqq\frac{\Gamma_-(\alpha,\beta,\gamma,R)\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}}{2(1+\sqrt[4]{\alpha\beta})\left[\Gamma_+(\alpha,\beta)\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}\right)\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}\right]^{K^2}}\times\\&\times\left(\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}+\sqrt{(p_1-p_0)^2+(q_1-q_0)^2}\right)^{1+K^2},\end{aligned}\right. \tag{3.34}$$

die offenbar auch für $x_1 = x_0$ und $y_1 = y_0$ gilt. Setzen wir schließlich

$$\nu = K^2 = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \tag{3.35}$$

und

$$\Gamma(\alpha, \beta, \gamma, R) = \frac{\Gamma_-(\alpha, \beta, \gamma, R)\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta} + 2\gamma^2}}{2\left(1 + \sqrt[4]{\alpha\beta}\right)\left[\Gamma_+(\alpha, \beta)\left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}\right)\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta} + 2\gamma^2}\right]^{K^2}}, \tag{3.36}$$

so erhalten wir die Ungleichung (3.3), womit unser Hilfssatz bewiesen ist. Wir benötigen nun die wohlbekannten elementaren Hilfssätze, deren Beweise wir hier der Vollständigkeit halber anführen:

HILFSSATZ 10. *Die reelle Funktion $z = z(x, y)$ sei in einer offenen Punktmenge Ω der xy-Ebene zweimal stetig differenzierbar und genüge der Differentialungleichung*

$$rt - s^2 > 0. \tag{3.37}$$

Außerdem sei (x_0, y_0) ein Punkt in der xy-Ebene und λ eine reelle Zahl, so daß die Strecke

$$\begin{cases} x = x_0 + \varrho\cos\lambda \\ y = y_0 + \varrho\sin\lambda \end{cases} \qquad (a \leqq \varrho \leqq b) \tag{3.38}$$

zu Ω gehört. Dann ist die Funktion

$$\begin{cases} F(\varrho; x_0, y_0, \lambda) = p(x_0 + \varrho\cos\lambda, y_0 + \varrho\sin\lambda)\cos\lambda + \\ \qquad\qquad + q(x_0 + \varrho\cos\lambda, y_0 + \varrho\sin\lambda)\sin\lambda \end{cases} \tag{3.39}$$

im Intervall $a \leqq \varrho \leqq b$ monoton.

BEWEIS. Wegen

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho} = r\cos^2\lambda + 2s\cos\lambda\sin\lambda + t\sin^2\lambda \tag{3.40}$$

und (3.37) gilt für $a \leqq \varrho \leqq b$ die Ungleichung

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho} \neq 0. \tag{3.41}$$

Daher ist F im Intervall $a \leqq \varrho \leqq b$ monoton, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

HILFSSATZ 11. *Es sei $z = z(x, y)$ eine in einer offenen Punktmenge Ω der xy-Ebene zweimal stetig differenzierbare reelle Funktion, die der Differentialungleichung (3.37) genügt. Ferner sei*

$$|z(x, y)| \leqq \delta < \infty \tag{3.42}$$

für $(x, y) \in \Omega$, und $\Omega_d (d > 0)$ sei die Teilmenge aller Punkte in Ω, deren Abstand vom Rande von Ω die Größe d überschreitet. Dann gilt für $(x, y) \in \Omega_d$ die Ungleichung

$$\sqrt{p^2 + q^2} \leqq \frac{2\delta}{d}. \tag{3.43}$$

Beweis. Es sei $(x_0, y_0)\in\Omega_d$ und λ eine reelle Zahl. Außerdem sei $F(\varrho; x_0, y_0, \lambda)$ die im Hilfssatz 10 erklärte Funktion. Dann gibt es offenbar zwei reelle Zahlen ϱ^- und ϱ^+ mit $-d\leqq\varrho^-\leqq 0$ und $0\leqq\varrho^+\leqq d$, so daß die Gleichungen

$$F(\varrho^-; x_0, y_0, \lambda)=\frac{z(x_0, y_0)-z(x_0-d\cos\lambda, y_0-d\sin\lambda)}{d} \tag{3.44}$$

und

$$F(\varrho^+; x_0, y_0, \lambda)=\frac{z(x_0+d\cos\lambda, y_0+d\sin\lambda)-z(x_0, y_0)}{d} \tag{3.45}$$

erfüllt sind. Wegen (3.42) ist dann

$$|F(\varrho^-; x_0, y_0, \lambda)|\leqq\frac{2\delta}{d} \tag{3.46}$$

und

$$|F(\varrho^+; x_0, y_0, \lambda)|\leqq\frac{2\delta}{d}. \tag{3.47}$$

Durch Anwendung von Hilfssatz 10 erhalten wir hieraus die Abschätzung

$$\left\{\begin{aligned}&|p(x_0, y_0)\cos\lambda+q(x_0, y_0)\sin\lambda|=|F(0; x_0, y_0, \lambda)\leqq\\&\qquad\leqq\max\left(|F(\varrho^-; x_0, y_0, \lambda)|,\ |F(\varrho^+; x_0, y_0, \lambda)|\right)\leqq\frac{2\delta}{d}.\end{aligned}\right. \tag{3.48}$$

Da diese für alle reellen Werte von λ gilt, so folgt (3.43), womit die Behauptung bewiesen ist.

Aus den letzten drei Hilfssätzen ergeben sich nun die folgenden Resultate:

Satz 1. *Es sei $z=z(x, y)$ eine in einer offenen Punktmenge Ω der xy-Ebene reelle, zweimal stetig differenzierbare Funktion, die der Differentialungleichung*

$$0<\alpha\leqq rt-s^2\leqq\beta<\infty \tag{3.49}$$

genügt. Außerdem sei

$$|z(x, y)|\leqq\delta<\infty \tag{3.50}$$

für $(x, y)\in\Omega$, und Ω_d $(d>0)$ sei die Teilmenge aller Punkte in Ω, deren Abstand vom Rande von Ω größer als d ist. Dann gilt für zwei beliebige Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) in Ω_d eine Abschätzung der Form

$$\left\{\begin{aligned}&\sqrt{(p(x_1, y_1)-p(x_0, y_0))^2+(q(x_1, y_1)-q(x_0, y_0))^2}\leqq\\&\qquad\leqq\Gamma_1(\alpha, \beta, \delta, d)\left(\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\right)^{\mu}.\end{aligned}\right. \tag{3.51}$$

Dabei ist $\mu=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, und $\Gamma_1(\alpha, \beta, \delta, d)$ ist eine stetige, positive Funktion für $0<\alpha\leqq\beta$ und alle positiven Werte von δ und d.

Beweis. Zur Abkürzung sei

$$p_k=p(x_k, y_k),\qquad q_k=q(x_k, y_k)\qquad(k=0, 1), \tag{3.52}$$

und wir setzen zunächst voraus, daß $(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2<\frac{d^2}{4}$ ausfällt. Nach Hilfssatz 11 gilt für $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\frac{d^2}{4}$ die Abschätzung

$$\sqrt{p(x, y)^2+q(x, y)^2}\leqq\frac{4\delta}{d}. \tag{3.53}$$

Durch Anwendung von Hilfssatz 9 $\left(\text{mit } R=\frac{d}{2} \text{ und } \gamma=\frac{4\delta}{d}\right)$ folgt

$$(3.54)\quad \begin{cases} \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\,\sqrt{(p_1-p_0)^2+(q_1-q_0)^2} \geqq \\ \quad \geqq |(x_1-x_0)(p_1-p_0)+(y_1-y_0)(q_1-q_0)| \geqq \\ \quad \geqq \Gamma\left(\alpha,\beta,\frac{4\delta}{d},\frac{d}{2}\right)\left(\sqrt{(p_1-p_0)^2+(q_1-q_0)^2}\right)^{1+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}}, \end{cases}$$

also

$$(3.55)\quad \begin{cases} \sqrt{(p_1-p_0)^2+(q_1-q_0)^2} \leqq \left(\Gamma\left(\alpha,\beta,\frac{4\delta}{d},\frac{d}{2}\right)\right)^{-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}} \times \\ \quad \times \left(\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\right)^{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}. \end{cases}$$

Es sei nun $(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2 \geqq \frac{d^2}{4}$. Dann besteht nach Hilfssatz 11 d Ungleichung

$$(3.56)\quad \begin{cases} \sqrt{(p_1-p_0)^2+(q_1-q_0)^2} \leqq \sqrt{p_0^2+q_0^2}+\sqrt{p_1^2+q_1^2} \leqq \frac{4\delta}{d} \leqq \\ \quad \leqq \frac{2^{2+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}\,\delta}{d^{1+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}}\left(\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\right)^{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}. \end{cases}$$

Aus (3.55) und (3.56) folgt schließlich (3.51) mit

$$(3.57)\qquad \mu=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

und

$$(3.58)\qquad \Gamma_1(\alpha,\beta,\delta,d)=\left(\Gamma\left(\alpha,\beta,\frac{4\delta}{d},\frac{d}{2}\right)\right)^{-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}+\frac{2^{2+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}\,\delta}{d^{1+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}},$$

womit Satz 1 bewiesen ist.

SATZ 2. *Es sei $z=z(x,y)$ eine in einer konvexen, offenen Punktmenge der xy-Ebene reelle, zweimal stetig differenzierbare Funktion, die der Differentialungleichung*

$$(3.59)\qquad 0<\alpha \leqq rt-s^2 \leqq \beta<\infty$$

genügt. Außerdem gelte

$$(3.60)\qquad |z(x,y)| \leqq \delta<\infty$$

für $(x,y)\in\Omega$, und (x_0,y_0) sei ein Punkt in Ω, dessen Abstand vom Rande von Ω eine positive Größe d überschreitet.

Dann besteht für jeden von (x_0,y_0) verschiedenen Punkt $(x,y)\in\Omega$ die Ungleichung

$$(3.61)\quad \left|\frac{(x-x_0)(p-p_0)+(y-y_0)(q-q_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\right| \geqq \Gamma_2(\alpha,\beta,\delta,d) \times$$
$$\times \left(\Lambda_d\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)\right)^{\nu}\ (p_0=p(x_0,y_0),\ q_0=q(x_0,y_0))$$

Dabei ist $\nu=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, *und die Funktion* $\Lambda_d(\varrho)$ *ist durch die Gleichungen*

$$\Lambda_d(\varrho)=\begin{cases}\varrho & \text{für} \quad 0\leqq\varrho\leqq\frac{d}{2}\\ \frac{d}{2} & \text{für} \quad \frac{d}{2}\leqq\varrho<\infty\end{cases} \tag{3.62}$$

definiert. Außerdem ist $\Gamma_2(\alpha,\beta,\delta,d)$ *eine stetige positive Funktion für* $0<\alpha\leqq\beta$ *und alle positiven Werte von* δ *und* d.

Beweis. Nach Hilfssatz 11 gilt für $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\frac{d^2}{4}$ die Abschätzung

$$\sqrt{p^2+q^2}\leqq\frac{4\delta}{d}. \tag{3.63}$$

Daraus, sowie aus Hilfssatz 9 $\left(\text{mit } R=\frac{d}{2} \text{ und } \gamma=\frac{4\delta}{d}\right)$, ergibt sich für

$$0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\frac{d^2}{4}$$

die Ungleichung

$$\left|\frac{(x-x_0)(p-p_0)+(y-y_0)(q-q_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\right|\geqq\Gamma\left(\alpha,\beta,\frac{4\delta}{d},\frac{d}{2}\right)\times \tag{3.64}$$
$$\times\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)^{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}}.$$

Es sei nun (x_1, y_1) ein von (x_0, y_0) verschiedener Punkt in Ω und λ eine reelle Zahl mit

$$\cos\lambda=\frac{x_1-x_0}{\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}} \tag{3.65}$$

und

$$\sin\lambda=\frac{y_1-y_0}{\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}}. \tag{3.66}$$

Wegen der Konvexität von Ω gehört die Strecke

$$\begin{cases}x=x_0+\varrho\cos\lambda\\ y=y_0+\varrho\sin\lambda\end{cases}\qquad\left(0\leqq\varrho\leqq\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\right) \tag{3.67}$$

zu Ω. Daraus, sowie aus Hilfssatz 10, folgt, daß die in (3.39) definierte Funktion $F(\varrho; x_0, y_0, \lambda)$ im Intervall $0\leqq\varrho\leqq\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$ monoton ist. Anwendung von (3.64) liefert für $0\leqq\varrho\leqq\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$ die Abschätzung

$$|F(\varrho; x_0, y_0, \lambda)-F(0; x_0, y_0, \lambda)|\geqq\Gamma_2(\alpha,\beta,\delta,d)\cdot(\Lambda_d(\varrho))^{\nu}. \tag{3.68}$$

Dabei ist $\nu=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, und die Funktionen $\Lambda_d(\varrho)$ und $\Gamma_2(\alpha,\beta,\delta,d)$ sind durch die Gln. (3.62) und

$$\Gamma_2(\alpha,\beta,\delta,d)=\Gamma\left(\alpha,\beta,\frac{4\delta}{d},\frac{d}{2}\right) \tag{3.69}$$

erklärt. Setzen wir $\varrho=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$ in (3.68), so erhalten wir die gesuchte Ungleichung (3.61). Damit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

Literatur

[1] AHLFORS, L.: On quasi-conformal mappings. J. d'Analyse Mathématique **3**, 1—5 (1953/54). — [2] ALEXANDROW, A. D.: Smoothness of the convex surface of bounded Gaussian curvature. Doklady Akad. Nauk. USSR. (N.S.) **36**, 195—199 (1942). — [3] COURANT, R., u. D. HILBERT: Methoden der Mathematischen Physik. II. Berlin 1937. — [4] FINN, R., u. J. SERRIN: On the Hölder continuity of quasi-conformal and elliptic mappings. Trans. Amer. Math. Soc. **89**, 1—15 (1958). — [5] HEINZ, E.: Über gewisse elliptische Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Anwendung auf die Monge-Ampèresche Gleichung. Math. Annalen **131**, 411—428 (1956). — [6] HEINZ, E.: On certain nonlinear elliptic differential equations and univalent mappings. J. d'Analyse Mathématique **5**, 197—272 (1956/57). — [7] HEINZ, E.: On elliptic Monge-Ampère equations and Weyl's embedding problem; Journal d'Analyse Mathématique **7**, 1—52 (1959). — [8] MORI, A.: On an absolute constant in the theory of quasi-conformal mappings. J. Math. Soc. Japan **8**, 156—166 (1956). — [9] MORREY, C.B.: On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 126—166 (1938). — [10] POGORELOW, A. W.: Die Verbiegung konvexer Flächen. Berlin: Akademie-Verlag 1957. — [11] PÓLYA, G., u. G. SZEGÖ: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. I. Berlin 1925.

Appl. Math. and Stat. Lab., Stanford University, Stanford, Cal. (U.S.A.)

(Eingegangen am 29. Januar 1959)

Steinhaus, H., u. K. Urbanik
Math. Zeitschr. 72, 127–145 (1959)

Poissonsche Folgen

Leon Lichtenstein zum Gedächtnis

Von

H. Steinhaus und K. Urbanik

Was eine Poissonsche Folge ist, zeigt die Physik an solchen Beispielen, wie etwa die Folge von Zeitpunkten, in welchen ein Leuchtschirm aufblitzt, weil er von einer Partikel getroffen wurde. Die moderne Wahrscheinlichkeitsrechnung hat den Begriff eines Poissonschen stochastischen Prozesses geschaffen; diese Entwicklung hat sich jedoch von den Poissonschen Folgen des Physikers ziemlich weit entfernt, so daß das Problem, ein mathematisches Modell einer solchen Folge effektiv zu konstruieren, unbeachtet blieb.

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit werden die Definitionen solcher Begriffe gegeben, wie der Poissonsche Prozeß, die numerische Poissonsche Folge und die numerische „in sich Poissonsche" Folge. In demselben Teil wird die perfekt gleichverteilte Folge definiert und es werden Sätze bewiesen, welche die Beziehung dieses Begriffes zu jenem einer Poissonschen Folge betreffen. Effektive Beispiele von Poissonschen Folgen werden im zweiten Teil gegeben. Im dritten Teil werden Beziehungen zwischen den drei im ersten Teil definierten Begriffen besprochen. Der letzte Teil bringt eine hinreichende Bedingung dafür, daß eine numerische Folge eine Poissonsche sei.

Das Symbol $\{t: \Phi\}$ bedeutet die Menge aller t, welche der Bedingung Φ genügen.

Das lineare Lebesguesche Maß einer auf der reellen Achse gelegenen und nach Lebesgue meßbaren Punktmenge A wird mit $|A|$ bezeichnet. Liegt A auf der positiven Halbachse und existiert die Grenze

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |A \cap \{t: 0 \leqq t \leqq T\}|,$$

so wird sie das *relative Maß* von A genannt und mit $|A|_R$ bezeichnet.

Die Mächtigkeit einer Menge B werde mit $\overline{\overline{B}}$ bezeichnet. Sei B eine Teilmenge der Menge aller natürlichen Zahlen — existiert die Grenze

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \overline{\overline{B \cap \{n: 1 \leqq n \leqq N\}}},$$

so wird sie *Frequenz* von B genannt und mit fr B bezeichnet.

In vorliegender Arbeit verstehen wir unter einem „Intervall" nur auf der reellen Halbachse gelegene und linksseitig offene Intervalle $\{t: a < t \leqq b\}$.

Ist I ein Intervall, so bezeichnet das Symbol $a+I$ das um a rechts verschobene Intervall, d. h.

$$a+I=\{t:\ t-a\in I\}.$$

I.

Eine nichtabnehmende Folge

$$s_1(\tau)\leqq s_2(\tau)\leqq\cdots \qquad (0\leqq\tau\leqq 1)$$

von nichtnegativen, meßbaren Funktionen $s_n(\tau)$ heißt ein *Signalprozeß*.

(i) Ein Signalprozeß $\{s_n(\tau)\}$ heißt ein *Poissonscher Prozeß*, wenn für jede natürliche Zahl k, bei beliebig gewählten, paarweise punktfremden Intervallen $I_1, I_2, \ldots, I_k$ und beliebigen ganzen nichtnegativen Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_k$

$$|A(I_1,\ldots,I_k;\ m,\ldots,m_k)|=\prod_{r=1}^{k} e^{-|I_r|}\frac{|I_r|^{m_r}}{m_r!} \tag{1}$$

gilt, wobei $A(I_1,\ldots,I_k;\ m,\ldots,m_k)$ die dadurch definierte τ-Menge bezeichnet, daß für $\tau\in A$ und $r=1, 2, \ldots, k$ I_r genau m_r Terme des Signalprozesses $\{s_n(\tau)\}$ enthält.

Die eben formulierte Definition ist eine Abart der üblichen Definition Poissonscher Prozesse mit 1 als mittlerer Anzahl von Signalen in jedem Einheitsintervall; die Annahme des Einheitsintervalls $\langle 01\rangle$ für die stochastische Variable ist bekanntlich keine Verminderung der Allgemeinheit.

Eine nichtabnehmende Folge $s_1, s_2 \ldots$ von nichtnegativen Zahlen s_n heißt eine *Signalfolge*.

(ii) Eine Signalfolge $\{s_n\}$ heißt eine *Poissonsche Folge*, wenn für jedes natürliche k bei beliebigen paarweise punktfremden Intervallen $I_1, I_2, \ldots, I_k$ und beliebigen ganzen nichtnegativen $m_1, m_2, \ldots, m_k$ die Beziehung

$$|B(I_1,\ldots,I_k;\ m_1,\ldots,m_k)|_R=\prod_{r=1}^{k} e^{-|I_r|}\frac{|I_r|^{m_r}}{m_r!} \tag{2}$$

gilt, wobei $B(I_1,\ldots,I_k;\ m_1,\ldots,m_k)$ als die Menge dieser t verstanden werden soll, für welche jedes Intervall $t+I_r$ genau m_r Terme der Signalfolge $\{s_n\}$ enthält ($r=1, 2, \ldots, k$).

(iii) Eine Signalfolge $\{s_n\}$ heißt eine *in sich Poissonsche Folge*, wenn unter Beibehaltung der bereits erklärten Symbole I_r, m_r die Beziehung

$$\mathrm{fr}\,C(I_1,\ldots,I_k;\ m_1,\ldots,m_k)=\prod_{r=1}^{k} e^{-|I_r|}\frac{|I_r|^{m_r}}{m_r!} \tag{3}$$

gilt, wobei $C(I_1,\ldots,I_k;\ m_1,\ldots,m_k)$ als die Menge derjenigen n erklärt sei, für welche s_n+I_r genau m_r Terme von $\{s_n\}$ für $r=1, 2, \ldots, k$ enthält.

(iv) Eine Funktionenfolge $\{a_n(\tau)\}$ werden wir als *regulär* bezeichnen, wenn jeder Term meßbar in $\langle 01\rangle$ ist, daselbst der Ungleichung $0\leqq a_n(\tau)<1$ genügt und für jedes System $x_1, x_2, \ldots, x_k$ $(0\leqq x_r\leqq 1)$ die Bedingung

$$\Big|\bigcap_{r=1}^{k}\{\tau:\ a_r(\tau)<x_r\}\Big|=\prod_{r=1}^{k} x_r \tag{4}$$

erfüllt. Wir erinnern hier an ein Beispiel [8] einer solchen Funktionenfolge, wo sogar alle Terme stetig sind.

Ein Gegenstück zum eben eingeführten Begriff einer regulären Funktion ist der Begriff einer regulären Folge (solche Folgen hat KOROBOW ([2], S. 216; vgl. auch [6], S. 760) als perfekt gleichverteilt bezeichnet).

(v) Wir nennen eine Zahlenfolge $\{a_n\}$ $(0 \leqq a_n < 1;\ n = 1, 2, \ldots)$ *regulär*, wenn für jedes Zahlensystem $x_1, x_2, \ldots, x_k$ $(0 \leqq x_r \leqq 1,\ r = 1, 2, \ldots, k)$ die Bedingung

$$\operatorname{fr} \bigcap_{r=1}^{k} \{n:\ a_{n+r} < x_r\} = \prod_{r=1}^{k} x_r \tag{5}$$

erfüllt ist. (M. a. W.: Die Zahlenfolge $\{a_n\}$ ist perfekt gleichverteilt, wenn für jedes k die Punkte $P_n^k = (a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{n+k})$ im Einheitswürfel des k-dimensionalen Raumes gleichverteilt sind.)

Die Beziehung zwischen den in (i) und (iv) eingeführten Begriffen ist durch den folgenden, wohlbekannten Satz gegeben:

Die Funktionenfolge $\{a_n(\tau)\}$ ist dann und nur dann regulär, wenn die durch

$$s_n(\tau) = -\log \prod_{r=1}^{n} (1 - a_r(\tau)) \tag{6}$$

erklärte Funktionenfolge $\{s_n(\tau)\}$ ein Poissonscher Prozeß ist.

Für Poissonsche *Folgen* gilt folgende hinreichende Bedingung:

SATZ 1. *Ist die Zahlenfolge $\{a_n\}$ regulär und*

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\prod_{r=1}^{n} (1 - a_r)} = e^{-1}, \tag{7}$$

so ist die durch

$$s_n = -\log \prod_{r=1}^{n} (1 - a_r) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

erklärte Zahlenfolge $\{s_n\}$ eine Poissonsche Folge.

Bevor wir diesen Satz beweisen, wollen wir bemerken, daß die Umkehrung nicht gilt. Im dritten Teil (Beispiel (a)) werden wir zeigen, daß es eine Poissonsche Folge $\{s_n\}$ gibt, für welche die durch (8) bestimmte Folge $\{a_n\}$ weder regulär ist, noch die Bedingung (7) erfüllt. Wir werden auch zeigen [Beispiel (b)], daß die Voraussetzung der Regularität von $\{a_n\}$ im Satz 1 ohne die Zusatzbedingung (7) nicht ausreicht.

Beweis. Zunächst werde festgestellt, daß man sich in der Definition (ii) auf solche Systeme von Intervallen I_r beschränken darf, bei denen der rechte Endpunkt von I_r mit dem linken Endpunkt von I_{r+1} für $r = 1, 2, \ldots, k-1$ zusammenfällt. Es soll also $\{I_r\}$ $(r = 1, 2, \ldots, k)$ ein solches Intervallsystem sein und $\{m_r\}$ das zugeordnete System von k ganzen nichtnegativen Zahlen. Man definiere b_n durch

$$b_n = -\log (1 - a_n) = s_n - s_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ s_0 = 0), \tag{9}$$

und eine von t und $\{m_r\}$ abhängige Menge D von natürlichen Zahlen durc

$$(10)\quad \begin{cases} D(t;\ m_1, \ldots, m_k) \\ = \{n:\ t \leqq b_{n+1}\} \cap \bigcap_{r=1}^{k} \left\{ n:\ \sum_{j=m_1+\cdots+m_{r-1}+1}^{m_1+\cdots+m_r} b_{n+j} \leqq |I_r|,\ \sum_{j=m_1+\cdots+m_{r-1}+1}^{m_1+\cdots+m_r+1} b_{n+j} > |I_r| \right\} \end{cases}$$

Wenn man die Regularität von $\{a_n\}$ heranzieht, so führt eine ziemlich ein fache Rechnung von (9) und (10) zu

$$(11)\qquad \mathrm{fr}\, D(t;\ m_1, \ldots, m_k) = e^{-t} \prod_{r=1}^{k} e^{-|I_r|} \frac{|I_r|^{m_r}}{m_r!} \qquad (t \geqq 0).$$

Es bedeute $B(I_1, \ldots, I_k;\ m_1, \ldots, m_k)$ dasselbe wie in (ii), B_n sei aber durc

$$(12)\quad \begin{cases} B_n(m_1, \ldots, m_k) = \{t:\ s_n < t \leqq s_{n+1}\} \cap \\ \qquad \cap \bigcap_{r=1}^{k} \left\{ t:\ s_{n+m_1+\cdots+m_r} \leqq t + \sum_{J=1}^{r} |I_j|,\ s_{n+m_1+\cdots+m_r+1} > t + \sum_{J=1}^{r} |I_j| \right\} \end{cases}$$

erklärt. Dann erhält man

$$B(I_1, \ldots, I_k;\ m_1, \ldots, m_k) \cap \{t:\ s_1 < t \leqq s_N\} = \bigcup_{n=1}^{N} B_n(m_1, \ldots, m_k),$$

woraus — unter Beachtung der Tatsache, daß die Mengen B_n paarweis punktfremd sind — die Ungleichung

$$(13)\quad \begin{cases} |B(I_1, \ldots, I_k;\ m_1, \ldots, m_k) \cap \{t:\ 0 \leqq t \leqq T\}| - \sum_{n=1}^{[T]} |B_n(m_1, \ldots, m_k)| \\ \qquad \leqq s_1 + |T - s_{[T]}| \end{cases}$$

folgt.

Die Voraussetzung (7) und die Formeln (8) und (9) führen zu

$$(14)\qquad \lim_{N\to\infty} \frac{s_N}{N} = \lim \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} b_n = 1,$$

was mit (13) den Grenzwertsatz

$$(15)\quad \begin{cases} \lim_{T\to\infty} \left| \frac{1}{T} |B(I_1, \ldots, I_k;\ m_1, \ldots, m_k) \cap \{t:\ 0 \leqq t \leqq T\}| - \right. \\ \qquad \left. - \frac{1}{[T]} \sum_{n=1}^{[T]} |B_n(m_1, \ldots, m_k)| \right| = 0 \end{cases}$$

impliziert. Um daraus die Behauptung des Satzes 1 zu folgern, genügt e die Beziehung

$$(16)\qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} |B_n(m_1, \ldots, m_k)| = \prod_{r=1}^{k} e^{-|I_r|} \frac{|I_r|^{m_r}}{m_r!}$$

zu beweisen. Nun aber erhalten wir aus den Definitionen (10) und (12)

$$\sum_{n=1}^{N} |B_n(m_1, \ldots, m_k)| = \int_0^{\infty} \overline{\overline{D(t;\ m_1, \ldots, m_k) \cap \{n;\ 1 \leqq n \leqq N\}}}\, dt,$$

was nach dem Fatouschen Lemma und der Formel (11) die Ungleichung

$$(17)\quad \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |B_n(m_1, \ldots, m_k)| \geqq \int_0^\infty \mathrm{fr}\, D(t;\ m_1, \ldots, m_k)\, dt = \prod_{r=1}^{k} e^{-|I_r|}\frac{|I_r|^{m_r}}{m_r!}$$

zur Folge hat. Die Gleichheit

$$|B_n(m_1, \ldots, m_k)| = b_{n+1} - \sum_{*} |B_n(q_1, \ldots, q_k)|$$

ist leicht zu begründen; die Summierung $\sum_{*}$ erstreckt sich auf alle Systeme $\langle q_1, q_2, \ldots, q_k\rangle$, die von $\langle m_1, m_2, \ldots, m_k\rangle$ verschieden sind. Daraus und aus (14) und (17) folgt die Ungleichung

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |B_n(m_1, \ldots, m_k)| \leqq \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} b_{n+1} -$$

$$-\sum_{*} \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |B_n(q_1, \ldots, q_k)| \leqq 1 - \sum_{*} \prod_{j=1}^{k} e^{-|I_j|}\frac{|I_j|^{q_j}}{q_j!} = \prod_{r=1}^{k} e^{-|I_r|}\frac{|I_r|^{m_r}}{m_r!},$$

welche bereits mit der Ungleichung (17) die Beziehung (16) impliziert. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Satz 2. *Eine Folge* $\{a_n\}$ $(0 \leqq a_n < 1,\ n = 1, 2, \ldots)$ *ist dann und nur dann regulär, wenn* $\{s_n\}$,

$$(18)\qquad s_n = -\log \prod_{j=1}^{n} (1 - a_j) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

eine in sich Poissonsche Folge ist.

Beweis. **1.** *Die Bedingung* (18) *ist hinreichend.*

Betrachten wir zwei Systeme positiver Zahlen, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ und $h_1, h_2, \ldots, h_k$. Die Zahlen h_r seien so klein, daß die Ungleichungen

$$(19)\qquad \sum_{r=1}^{j} (x_r + h_r) \leqq \sum_{r=1}^{j+1} x_r \qquad (j = 1, 2, \ldots, k-1)$$

erfüllt sind. Wir definieren $2k$ Intervalle I_j $(j = 1, 2, \ldots, 2k)$:

$$(20)\qquad \begin{cases} I_1 = \{t:\ 0 < t \leqq x_1\}, \\ I_j = \left\{t:\ \sum_{r=1}^{j-1} (x_r + h_r) < t \leqq \sum_{r=1}^{j} x_r\right\} \qquad (j = 2, 3, \ldots, k), \\ I_{j+k} = \left\{t:\ \sum_{r=1}^{j} x_r < t \leqq \sum_{r=1}^{j} (x_r + h_r)\right\} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k). \end{cases}$$

Die Disjunktion der $2k$ Intervalle I_j wird durch (19) garantiert. Es ist leicht zu sehen, daß die Ungleichungen

$$(21)\qquad x_j < s_{n+j} - s_{n+j-1} \leqq x_j + h_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

folgende Ungleichungen implizieren:

$$s_n + \sum_{r=1}^{j} x_r < s_{n+j} \leqq s_n + \sum_{r=1}^{j} (x_r + h_r) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Anders gesagt, die Ungleichungen (21) haben zur Folge, daß jedes Intervall s_n+I_{k+1}, s_n+I_{k+2}, ..., s_n+I_{2k-1} genau je einen Term von $\{s_n\}$ enthält, das Intervall s_n+I_{2k} wenigstens einen solchen, dagegen keines der Intervalle s_n+I_1, s_n+I_2, ..., s_n+I_k solche Terme enthält. Es findet also die Inklusion

$$(22)\quad \begin{cases} \bigcap_{J=1}^{k} \{n\colon x_j < s_{n+j-1} \leqq x_j + h_j\} \subset C(I_1, \ldots, I_{2k-1};\ 0, \ldots, 0,\ 1, \ldots, 1) \setminus \\ \qquad\qquad \setminus C(I_1, \ldots, I_{2k};\ 0, \ldots, 0,\ 1, \ldots, 1,\ 0) \end{cases}$$

statt, wo die rechts vom Inklusionszeichen stehenden Mengen in (iii) erklärt worden sind, $A \setminus B$ aber die Differenz der Mengen A, B bedeutet.

Nehmen wir nun an, $\{s_n\}$ sei eine in sich Poissonsche Folge. Dann impliziert (22) die Ungleichung

$$(23)\quad \overline{\mathrm{fr}} \bigcap_{J=1}^{k} \{n\colon x_j < s_{n+j} - s_{n+j-1} < x_j + h_j\} \leqq \prod_{J=1}^{k} e^{-|I_j|} \prod_{j=k+1}^{2k-1} e^{-|I_j|}\, |I_j|\, (1 - e^{-|I_{2k}|}),$$

wo $\overline{\mathrm{fr}}\, A$, die obere Frequenz von A, durch

$$\overline{\mathrm{fr}}\, A = \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \overline{A \cap \{n\colon 1 \leqq n \leqq N\}}$$

erklärt werden soll. Aus (20) und (23) folgt

$$\overline{\mathrm{fr}} \bigcap_{J=1}^{k} \{n\colon x_j < s_{n+j} - s_{n+j-1} \leqq x_j + h_j\} \leqq \prod_{j=1}^{k} e^{-x_j} \Big(\sum_{r=1}^{j} h_r \Big).$$

Daraus erhalten wir für eine genügend feine Teilung,

$$0 < u_j \leqq x_j^{(1)} < x_j^{(2)} < \cdots < x_j^{(m_j)} = v_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

$$h_j = x_j^{(r+1)} - x_j^{(r)} \qquad (r = 1, 2, \ldots, m_j - 1),$$

die Abschätzung

$$\overline{\mathrm{fr}} \bigcap_{J=1}^{k} \{n\colon u_j < s_{n+j} - s_{n+j-1} \leqq v_j\} \leqq \sum_{l_1=1}^{m_1} \sum_{l_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{l_k=1}^{m_k} \prod_{j=1}^{k} e^{-x_j^{(l_j)}} \Big(\sum_{r=1}^{j} h_r \Big),$$

welche für $h_1 \to 0$ und dann $h_2 \to 0, \ldots, h_k \to 0$ die Ungleichung

$$(24)\quad \begin{cases} \overline{\mathrm{fr}} \bigcap_{j=1}^{k} \{n\colon u_j < s_{n+j} - s_{n+j-1} \leqq v_j\} \leqq \int_{u_1}^{v_1} \int_{u_2}^{v_2} \cdots \int_{u_k}^{v_k} e^{-\sum_{j=1}^{k} x_j}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_k \\ \qquad\qquad = \prod_{j=1}^{k} (e^{-u_j} - e^{-v_j}) \end{cases}$$

ergibt. Sei nun $\{a_n\}$ die durch (18) erklärte Folge. Für jedes System

$$0 \leqq x_j < y_j < 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

gilt die Gleichung

$$\bigcap_{J=1}^{k} \{n\colon x_j < a_{n+j} \leqq y_j\} = \bigcap_{j=1}^{k} \{n\colon -\log(1-x_j) < s_{n+j} - s_{n+j-1} \leqq -\log(1-y_j)\},$$

welche wegen (24) die Ungleichung

$$\overline{\mathrm{fr}} \bigcap_{j=1}^{k} \{n\colon\ x_j < a_{n+j} \leq y_j\} \leq \prod_{j=1}^{k} (y_j - x_j)$$

liefert. Daraus folgt aber nach einem Satze von POSTNIKOW ([4], S. 973) die Regularität von $\{a_n\}$. Somit ist das Hinreichen der Bedingung (18) bewiesen.

2. *Die Bedingung* (18) *ist notwendig.*

Setzen wir die Regularität von $\{a_n\}$ voraus. Um zu zeigen, daß $\{s_n\}$ eine Poissonsche Folge ist, genügt es zu beweisen, daß die Bedingung (iii) für alle Systeme $I_1, I_2, \ldots, I_k$ erfüllt ist, bei denen der rechte Endpunkt des Intervalles I_r mit dem linken Endpunkt von I_{r+1} $(r = 1, 2, \ldots, k-1)$ zusammenfällt. Sei nun $\{I_r\}$ ein solches Intervallsystem, und $m_1, m_2, \ldots, m_k$ seien ganz und nichtnegativ. Benutzen wir die Bezeichnungen (9) und (10) und die Formel (11), so erhalten wir

$$\text{(25)} \qquad \mathrm{fr}\, D(0;\ m_1, \ldots, m_k) = \prod_{j=1}^{k} e^{-|I_j|} \frac{|I_j|^{m_j}}{m_j!}.$$

Sei $C(I_1, \ldots, I_k;\ m_1, \ldots, m_k)$ die in (iii) definierte Menge; die Beziehung

$$C(I_1, \ldots, I_k;\ m_1, \ldots, m_k) = D(0;\ m_1, \ldots, m_k)$$

ist leicht zu verifizieren. Sie liefert mit (25) die Formel

$$\mathrm{fr}\, C(I_1, \ldots, I_k;\ m_1, \ldots, m_k) = \prod_{j=1}^{k} e^{-|I_j|} \frac{|I_j|^{m_j}}{m_j!}.$$

Damit ist auch der zweite Teil des Satzes 2 bewiesen.

II.

Es sollen jetzt effektive Beispiele von Poissonschen Prozessen und Poissonschen Folgen gegeben werden.

Eine reguläre Funktionenfolge ist z. B. $\{\vartheta_n(\tau)\}$ $(0 \leq \tau \leq 1)$, wenn man unter $0, \varepsilon_1 \varepsilon_2, \ldots$ die dyadische Entwicklung von τ versteht (für $\tau > 0$ soll es immer diejenige sein, welche unendlich viele Ziffern 1 enthält) und in

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(\tau) &= 0, \varepsilon_1\, \varepsilon_3\, \varepsilon_6\, \varepsilon_{10} \ldots \\
\vartheta_2(\tau) &= 0, \varepsilon_2\, \varepsilon_5\, \varepsilon_9\, \varepsilon_{14} \ldots \\
\vartheta_3(\tau) &= 0, \varepsilon_4\, \varepsilon_8\, \varepsilon_{13} \varepsilon_{19} \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

die Symbole $0, \ldots$ rechts als dyadische Entwicklungen liest (vgl. [7], S. 24—28; [1], IV § 7). Wenn man noch $\vartheta_n^*(\tau) = \vartheta_n(\tau)$ für $\vartheta_n(\tau) < 1$ und $\vartheta_n^*(\tau) = 0$ für $\vartheta_n(\tau) = 1$ setzt, bekommt man eine reguläre Funktionenfolge $\{\vartheta_n^*(\tau)\}$, die der Ungleichung $0 \leq \vartheta_n^*(\tau) < 1$ genügt. Auf Grund des im Teil I unmittelbar vor Satz 1 zitierten Satzes ist dann

$$s_n(\tau) = -\log \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \vartheta_j^*(\tau)\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

der allgemeine Term eines Poissonschen Prozesses $\{s_n(\tau)\}$.

Schreiben wir

$$\alpha_n = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^k}{3^{3^k}} \right\rangle \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

wo $\langle x \rangle = x - [x]$ gesetzt werden soll; $[x]$ bedeutet den ganzen Teil von x. Wie Korobow ([2], S. 218) gezeigt hat, ist die Zahlenfolge $\{\alpha_n\}$ regulär. Daraus folgt nach unserem Satze 2, daß die durch

$$s_n = -\log \prod_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

definierte Folge $\{s_n\}$ eine in sich Poissonsche Folge ist. Wir wissen nicht, ob sie auch eine Poissonsche Folge ist.

Sei c eine in bezug auf irgend eine Basis normale Zahl — wir können z. B. die Zahl c als die absolut-normale Zahl von Sierpiński definieren [5]. Sei $0, \varepsilon_1 \varepsilon_2, \ldots$ die Entwicklung von c nach einer Basis g ($g \geqq 2$). Von dieser Entwicklung ausgehend hat L. P. Starczenko ([6], S. 764) eine Matrix

$$\begin{array}{l} \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots \\ \varepsilon_1^{(1)}, \quad \varepsilon_2^{(1)}, \ldots \\ \varepsilon_1^{(2)}, \quad \varepsilon_2^{(2)}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

konstruiert, deren Terme zum Wertevorrat $0, 1, \ldots, g-1$ gehören und deren Zeilen „gleichmäßig normal" sind; dieser Begriff ist in [3] S. 365 definiert. Er hat auch gezeigt, daß die Zahlen β_n deren Entwicklungen nach g durch die Kolonnen derselben Matrix geliefert werden, also

$$\beta_n = 0, \varepsilon_n \varepsilon_n^{(1)} \varepsilon_n^{(2)} \ldots \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

eine reguläre Folge $\{\beta_n\}$ bilden. Zieht man also unseren Satz 2 heran, so bekommt man ein zweites Beispiel einer in sich Poissonschen Folge $\{s_n\}$, indem man

$$s_n = -\log \prod_{j=1}^{n} (1 - \beta_j) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

setzt. Auch hier fehlt die Antwort auf die Frage, ob diese Folge eine Poissonsche ist.

Jetzt wollen wir eine effektive Zahlenfolge konstruieren, die zugleich eine Poissonsche und eine in sich Poissonsche Folge ist.

Unter einer *r-Kette* ($r \geqq 1$) verstehen wir die Gesamtheit der Zahlen $j/2^r$ ($j = 0, 1, \ldots, 2^r - 1$).

Eine *r-Gruppe* entsteht, wenn man nacheinander alle Permutationen der r-Kette anschreibt. Dabei kann man als erste Permutation die Anordnung $j = 0, 1, \ldots, 2^{r-1}$ wählen und dann lexikographisch vorgehen, so daß die Anordnung $j = 2^{r-1}, \ldots, 1, 0$ als letzte erscheint, doch ist auch irgendeine andere wohldefinierte Vorschrift zulässig.

Eine *r-Klasse* entsteht, wenn eine r-Gruppe $(2^{r+1}+1)!$ mal wiederholt wird. Eine solche Klasse besteht also aus $2^r(2^r)!\,(2^{r+1}+1)!$ Termen, welche alle zum Zahlenvorrat $j/2^r$ $(j=0, 1, \ldots, 2^r-1)$ gehören.

Schreibt man nacheinander alle Klassen auf, d. h. zuerst alle Terme der 1-Klasse, dann alle Terme der 2-Klasse, usw., so entsteht eine wohldefinierte unendliche Folge $\{\gamma_n\}$.

Zunächst wollen wir zeigen, daß die Folge $\{\gamma_n\}$ regulär ist.

Es seien $q_1, q_2, \ldots, q_k$ beliebige natürliche Zahlen, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ganze Zahlen, die den Ungleichungen

$$0 \leqq p_j \leqq 2^{q_j}-1 \qquad (j=1, 2, \ldots, k)$$

genügen.

Bezeichnen wir mit Z_r die Anzahl aller Systeme $\langle \gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \ldots, \gamma_{n+k}\rangle$, die man in derselben r-Gruppe finden kann, derart daß

1. alle Terme $\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \ldots, \gamma_{n+k}$ zu derselben Permutation dieser Gruppe gehören,

2. sämtliche Ungleichungen

$$\frac{p_j}{2^{q_j}} \leqq \gamma_{n+j} < \frac{p_j+1}{2^{q_j}} \qquad (j=1, \ldots, k)$$

erfüllt sind.

Ist nun $r > \max\limits_{1\leqq j\leqq k} q_j$, $2^r > k$, so ist die Anzahl aller Zahlensysteme

$$\left\langle \frac{m_1}{2^r}, \frac{m_2}{2^r}, \ldots, \frac{m_k}{2^r}\right\rangle \qquad (0 \leqq m_j \leqq 2^r-1;\ j=1, 2, \ldots, k),$$

welche den Ungleichungen

$$\frac{p_j}{2^{q_j}} \leqq m_j < \frac{p_j+1}{2^{q_j}} \qquad (j=1, 2, \ldots, k)$$

genügen, $2^{kr-\sum_{j=1}^{k} q_j}$; jedes solche System tritt in $(2^r-k+1)!$ Permutationen der r-Kette auf. Daraus folgern wir

$$Z_r = 2^{kr-\sum_{j=1}^{k} q_j}\cdot(2^r-k+1)! \quad \text{für} \quad r > \max_{1\leqq j\leqq k} q_j,\ 2^r > k. \tag{26}$$

Δ_r möge die Anzahl aller Systeme $\langle \gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \ldots, \gamma_{n+k}\rangle$ bezeichnen, welche zumindest eine Permutation der r-Kette enthalten, ohne daß alle Terme des Systems in einer einzigen Permutation der r-Kette enthalten seien. Es ist leicht zu sehen, daß für $2^r > k$ die Ungleichung

$$\Delta_r \leqq k\left((2r)!+1\right) \tag{27}$$

besteht.

Mit A_N bezeichnen wir die Anzahl aller Systeme $\langle \gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \ldots, \gamma_{n+k}\rangle$ mit $n \leqq N$ und

$$\frac{p_j}{2^{q_j}} \leqq \gamma_{n+j} < \frac{p_j+1}{2^{q_j}} \qquad (j=1, 2, \ldots, k).$$

Wenn man nun die Zahl N als

$$N = \sum_{r=1}^{m_N-1} 2^r (2^r)! \, (2^{r+1}+1)! + c_N 2^{m_N} (2^{m_N})! + d_N \tag{28}$$

mit

$$0 \leqq c_N < (2^{m_N}+1)!, \qquad 0 \leqq d_N < 2^{m_N} (2^{m_N})! \tag{29}$$

darstellt, so erhalten wir auf Grund der Definitionen von A_N, Z_r und Δ die Ungleichung

$$\left| A_N - \sum_{r=1}^{m_N-1} (2^{r+1}+1)! \, Z_r - c_N Z_{m_N} \right| \leqq \sum_{r=1}^{m_N-1} (2^{r+1}+1)! \, \Delta_r + c_N \Delta_{m_N} + d_N .$$

Daraus folgt, wenn man (27), (28) und (29) heranzieht, die Formel

$$A_N = \sum_{r=1}^{m_N-1} (2^{r+1}+1)! \, Z_r + c_N Z_{m_N} + o(N),$$

welche angesichts von (26) und (28) die Abschätzung

$$A_N = \sum_{r=1}^{m_N-1} 2^{kr - \sum_{j=1}^{k} q_j} (2^r - k + 1)! \, (2^{r+1}+1)! + c_N \, 2^{k m_N - \sum_{j=1}^{k} q_j} (2^{m_N} - k + 1)! +$$

$$+ o(N) = 2^{-\sum_{j=1}^{k} q_j} N + o(N)$$

liefert.

Damit haben wir aber die Existenz der Frequenz

$$\operatorname{fr} \bigcap_{j=1}^{k} \left\{ n : \frac{p_j}{2^{q_j}} \leqq \gamma_{n+j} < \frac{p_j + 1}{2^{q_j}} \right\} = 2^{-\sum_{j=1}^{k} q_j}$$

festgestellt. Die Beziehung

$$\operatorname{fr} \bigcap_{j=1}^{k} \{ n : \gamma_{n+j} < x_j \} = \prod_{j=1}^{k} x_j$$

folgt daraus unmittelbar für alle Systeme $x_1, x_2, \ldots, x_k \, (0 \leqq x_j \leqq 1 \,; j = 1, 2, \ldots, k)$. Die Regularität von $\{\gamma_n\}$ ist also bewiesen.

Unter Benutzung von (28) kann man schreiben

$$\prod_{n=1}^{N-d_N} (1-\gamma_n) = \prod_{r=1}^{m_N-1} \left(\prod_{j=0}^{2^r-1} \left(1 - \frac{j}{2^r}\right)^{(2^{r+1}+1)!\,(2^r)!} \right) \prod_{j=0}^{2^{m_N}-1} \left(1 - \frac{j}{2^{m_N}}\right)^{c_N (2^{m_N})!}$$

$$= \left(2^{m_N}! / (2^{m_N})^{2^{m_N}}\right)^{c_N (2^{m_N})!} \cdot \prod_{r=1}^{m_N-1} \left[(2^r)! / (2^r)^{2^r} \right]^{(2^{r+1}+1)!\,(2^r)!} .$$

Die Stirlingsche Formel, (28) und (29) liefern dann

$$\sqrt[N]{\prod_{n=}^{N-d_N} (1-\gamma_n)} = \left(\sqrt{2\pi \cdot 2^{m_N}}\right) \frac{c_N (2^{m_N})!}{N} \cdot \prod_{r=1}^{m_N-1} \left(\sqrt{2\pi \cdot 2^r}\right) \frac{(2^{r+1}+1)!\,(2^r)!}{N} \times \tag{30}$$

$$\times \exp\left(- \frac{1}{N} \prod_{r=1}^{m_N-1} 2^r (2^{r+1}+1)! \, (2^r)! - \frac{1}{N} c_N 2^{m_N} (2^{m_N})! \right) +$$

$$+ o(N) = e^{-1} + o(N).$$

Da kein Term der m_N-Klasse die Zahl $1-1/2^{m_N}$ übertrifft, gelten die Ungleichungen

$$1 \geqq \prod_{n=N-d_N+1}^{N} (1-\gamma_n) \geqq \left(\frac{1}{2^{m_N}}\right)^{d_N} \geqq \left(\frac{1}{2^{m_N}}\right)^{2^{m_N}(2^{m_N})!};$$

mit (28) und (29) ergeben sie die Abschätzung

$$1 \geqq \sqrt[N]{\prod_{n=N-d_N+1}^{N} (1-\gamma_n)} \geqq \left(\frac{1}{2^{m_N}}\right)^{\frac{2^{m_N}(2^{m_N})!}{N}} \geqq \left(\frac{1}{2^{m_N}}\right)^{\frac{2^{m_N}(2^{m_N})!}{2^{m_N-1}(2^{m_N}+1)!\,(2^{m_N-1})!}}$$

$$\geqq \left(\frac{1}{2^{m_N}}\right)^{\frac{1}{2^{m_N}}} = 1 + o(N),$$

welche mit (30) die Gleichung

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{\prod_{n=1}^{N} (1-\gamma_n)} = e^{-1}$$

impliziert.

Wir haben bereits die Regularität der Folge $\{\gamma_n\}$ bewiesen. Die Sätze 1 und 2 zeigen also, daß die durch

$$s_n = -\log \prod_{j=1}^{n} (1-\gamma_j) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

erklärte Folge $\{s_n\}$ zugleich eine Poissonsche und eine in sich Poissonsche Folge ist.

III.

Wir haben jetzt die Beziehungen zu untersuchen, welche die Begriffe des Poissonschen Prozesses, der Poissonschen Folge und der in sich Poissonschen Folge verbinden.

Zunächst bemerken wir, daß aus dem Birkhoffschen Ergodensatz folgt: *Ist $\{s_n(\tau)\}$ ein Poissonscher Prozeß, so ist für fast alle τ_0 die numerische Folge $\{s_n(\tau_0)\}$ eine Poissonsche Folge.*

Ist $\{s_n(\tau)\}$ ein Poissonscher Prozeß, so ist für fast alle τ_0 die numerische Folge $\{s_n(\tau_0)\}$ eine in sich Poissonsche Folge (vgl. [9], S. 336).

Es entsteht die Frage, ob die Umkehrungen dieser Aussagen richtig sind. M. a. W.: Ist es wahr, daß eine Folge $\{s_n(\tau)\}$, welche für fast alle τ_0 eine Poissonsche oder eine in sich Poissonsche ist, notwendig ein Poissonscher Prozeß ist? Die Antwort ist negativ, weil die numerischen Folgen ihren Poissonschen bzw. in sich Poissonschen Charakter durch die Änderung endlich vieler Terme nicht einbüßen, ein Poissonscher Prozeß aber nach einer solchen Modifikation aufhören kann ein solcher zu sein. Wir werden aber zeigen, daß gewisse Zusatzbedingungen über Signalprozesse zu einer positiven Antwort führen.

Ein Signalprozeß $\{s_n(\tau)\}$ heißt *homogen*, wenn stets für beliebige punktfremde Intervalle $I_1, I_2, \ldots, I_k$ und beliebige nichtnegative ganze Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_k$ die Gleichheit

$$|A(t+I_1, \ldots, t+I_k;\ m_1, \ldots, m_k)| = |A(I_1, \ldots, I_k;\ m_1, \ldots, m_k)|$$

für alle positiven reellen t gilt; dabei ist die Bedeutung der Symbole in I (i) und in sechs vor I (i) stehenden Zeilen zu finden. Ein Signalprozeß $\{s_n(\tau)\}$ heißt *stationär*, wenn für punktfremde I_j und nichtnegative ganze m_j ($j=1, 2, \ldots, k$) die Gleichheit

$$|A(s_r(\tau)+I_1, \ldots, s_r(\tau)+I_k;\ m_1, \ldots, m_k)| = |A(I_1, \ldots, I_k;\ m_1, \ldots, m_k)|$$

für alle natürliche r gilt.

SATZ 3. *Der Signalprozeß $\{s_n(\tau)\}$ sei homogen und die numerische Folge $\{s_n(\tau_0)\}$ für fast alle τ_0 eine Poissonsche. Dann ist $\{s_n(\tau)\}$ ein Poissonscher Prozeß.*

Beweis. Sei $\chi_t(\tau)$ die im Sinne der Mengenlehre charakteristische Funktion der Menge $A(t+I_1, \ldots, t+I_k;\ m_1, \ldots, m_k)$; d. h. $\chi_t(\tau)=1$ für $\tau \in A$, $\chi_t(\tau)=0$ für τ non $\in A$.

Es werde die Menge der t, für welche genau $m_1, m_2, \ldots, m_k$ Terme der Folge $\{s_n(\tau_0)\}$ in die respektiven Intervalle $t+I_1$, $t+I_2, \ldots, t+I_k$ fallen, mit $B_{\tau_0}(I_1, \ldots, I_k;\ m_1, \ldots, m_k)$ bezeichnet. Es ist dann leicht die Formel

$$B_{\tau_0}(I_1, \ldots, I_k;\ m_1, \ldots, m_k) = \{t: \chi_t(\tau_0) = 1\}$$

nachzuprüfen. Aus ihr ergibt sich die Beziehung

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_t(\tau_0)\, dt = |B_{\tau_0}(I_1, \ldots, I_k;\ m_1, \ldots, m_k)|_R = \prod_{j=1}^{k} e^{-|I_j|} \frac{|I_j|^{m_j}}{m_j!}$$

für fast alle τ_0, da $\{s_n(\tau_0)\}$ für fast alle τ_0 eine Poissonsche Folge ist. Daraus folgt aber angesichts der Homogenität des Prozesses $\{s_n(\tau)\}$ und der Beschränktheit der Funktion $\chi_t(\tau)$ die Schlußkette

$$|A(I_1, \ldots, I_k;\ m_1, \ldots, m_k)| = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |A(t+I_1, \ldots, t+I_k;\ m_1, \ldots, m_k)|\, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^1 \chi_t(\tau)\, d\tau\, dt = \int_0^1 \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_t(\tau)\, dt \right) d\tau = \prod_{j=1}^{k} e^{-|I_j|} \frac{|I_j|^{m_j}}{m_j!}.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

SATZ 4. *Der Signalprozeß $\{s_n(\tau)\}$ sei stationär und liefere für jedes τ eine in sich Poissonsche Folge. Dann ist $\{s_n(\tau)\}$ ein Poissonscher Prozeß.*

Beweis. Es seien $I_1, I_2, \ldots, I_k$ disjunkte Intervalle und $m_1, m_2, \ldots, m_k$ nichtnegative ganze Zahlen. Mit $C_{\tau_0}(I_1, \ldots, I_k;\ m_1, \ldots, m_k)$ bezeichnen wir die Menge aller n, für welche in den respektiven Intervallen $s_n(\tau_0)+I_1$, $s_n(\tau_0)+I_2, \ldots, s_n(\tau_0)+I_k$ genau $m_1, m_2, \ldots, m_k$ Terme der Folge $\{s_n(\tau_0)\}$ vorkommen. Unter Benutzung der im Beweise des Satzes 3 eingeführten Bezeichnungen erhalten wir die Formel

$$C_{\tau_0}(I_1, \ldots, I_k;\ m_1, \ldots, m_k) = \{n: \chi_{s_n(\tau_0)}(\tau_0) = 1\},$$

welche für fast alle τ_0 die Beziehung

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\chi_{s_n(\tau_0)}(\tau_0)=\mathrm{fr}\,C_{\tau_0}(I_1,\ldots,I_k;\,m_1,\ldots,m_k)=\prod_{j=1}^{k}e^{-|I_j|}\frac{|I_j|^{m_j}}{m_j!}$$

impliziert, weil $\{s_n(\tau_0)\}$ für fast alle τ_0 eine in sich Poissonsche Folge darstellt. Dieses Ergebnis führt, wenn der stationäre Charakter des Prozesses $\{s_n(\tau)\}$ und die Beschränktheit der Funktion $\chi_{s_n(\tau)}(\tau)$ herangezogen werden, zur Schlußkette

$$\begin{aligned}&|A(I_1,\ldots,I_k;\,m_1,\ldots,m_k)|\\&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|A(s_n(\tau)+I_1,\ldots,s_n(\tau)+I_k;\,m_1,\ldots,m_k)|\\&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int_0^1\chi_{s_n(\tau)}(\tau)\,d\tau=\int_0^1\Big(\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\chi_{s_n(\tau)}(\tau)\Big)\,d\tau=\prod_{j=1}^{k}e^{-|I_j|}\frac{|I_j|^{m_j}}{m_j!}.\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Jetzt soll gezeigt werden, daß eine Poissonsche Folge nicht eine in sich Poissonsche Folge zu sein braucht, und daß eine in sich Poissonsche Folge ebensowenig eine Poissonsche sein muß.

(a) Sei $\{s_n\}$ eine Poissonsche Folge. Wir wählen eine Teilfolge $n_1<n_2<\cdots$ der natürlichen Folge derart, daß die Bedingungen

$$s_{n_k}<s_{n_k+1}\qquad(k=1,2,\ldots),$$

$$\Big|\bigcup_{k=1}^{\infty}\{t\colon s_{n_k}<t\leqq s_{n_k+1}\}\Big|_R=0 \tag{31}$$

erfüllt seien. Die natürlichen Zahlen q_k unterwerfen wir den Bedingungen

$$\frac{s_{n_k+1}}{q_k}<\frac{1}{k}\qquad(k=1,2,\ldots), \tag{32}$$

$$q_k<q_{k+1}\qquad(k=1,2,\ldots), \tag{33}$$

$$q_1>n_1,\quad q_k>n_k-n_{k-1}\qquad(k=2,3,\ldots) \tag{34}$$

und setzen

$$u_j^{(k)}=\Big(1-\frac{j}{q_k}\Big)s_{n_k}+\frac{j}{q_k}s_{n_k+1}\qquad(j=1,2,\ldots,q_k-1;\;k=1,2,\ldots).$$

Mit $\{s_n^*\}$ bezeichnen wir die aus den wachsend geordneten Zahlen s_n, $u_j^{(k)}$ bestehende Folge ($n=1,2,\ldots$; $k=1,2,\ldots$; $j=1,2,\ldots,q_k-1$):

$$s_1^*=s_1,\ldots,s_{n_1}^*=s_{n_1},s_{n_1+1}^*=u_1^{(1)},\ldots,s_{n_1+q_1-1}^*=u_{q_1-1}^{(1)},\ldots,s_{n_k+q_1+\cdots+q_k}^*=s_{n_k+1},\ldots.$$

Die Folge $\{s_n^*\}$ ist immer noch eine Poissonsche; es ist nämlich für jedes Intervall I die Menge jener t, für welche $t+I$ die Signale $\{u_j^{(k)}\}$ $(j=1,2,\ldots,q_k-1$;

$k=1, 2, \ldots$) enthält, eine Teilmenge von

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{t: s_{n_k} - |I| < t \leqq s_{n_k+1} + |I|\},$$

letztere hat aber nach (31) Null als relatives Maß. Jetzt wollen wir zeigen, daß $\{s_n^*\}$ keine in sich Poissonsche Folge ist.

Mit $C(I)$ soll die Menge derjenigen n bezeichnet werden, für welche das Intervall $s_n^* + I$ mindestens einen Term der Folge $\{s_n^*\}$ enthält. Es werde auch die Bezeichnung $C_N(I)$ für $C(I) \cap \{n: 1 \leqq n \leqq N\}$ eingeführt. Hat die natürliche Zahl N die Gestalt

$$N = n_k + q_1 + q_2 + \cdots + q_k \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{35}$$

dann findet man unter den N ersten Termen s_n^* alle Terme s_{n_r}, $u_j^{(r)}$ ($j=1, 2, \ldots, q_r - 1$; $r=1, 2, \ldots, k$). Ist $|I| > 1/q_r$, so enthält jedes Intervall $s_{n_r} + I$, $u_j^{(r)} + I$ ($j=1, 2, \ldots, q_r - 1$) mindestens ein Signal. Hieraus ergibt sich mit (33) die Ungleichung

$$\overline{\overline{C_N(I)}} \geqq \sum_{r=r_0}^{k} q_r, \tag{36}$$

wo r_0 der kleinste Index r mit $|I| > 1/q_r$ ist. Aus (34) und (35) folgt die Ungleichung

$$N \leqq 2(q_1 + q_2 + \cdots + q_k),$$

welche mit (36) die Abschätzung

$$\overline{\overline{C_N(I)}} \geqq \tfrac{1}{2} N + o(N)$$

für alle N von der Gestalt (35) impliziert. Daher gilt

$$\overline{\mathrm{fr}}\, C(I) = \limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N} \overline{\overline{C_N(I)}} \geqq \frac{1}{2}$$

für jedes I. Daraus schließt man aber, daß $\{s_n^*\}$ keine in sich Poissonsche Folge sein kann, da für solche Folgen die Beziehung

$$\mathrm{fr}\, C(I) = 1 - e^{-|I|}$$

besteht.

Die Folge $\{s_n^*\}$ erfüllt auch nicht die Voraussetzungen des Satzes 1: nach Satz 2 ist nämlich die durch die Formel

$$s_n^* = -\log \prod_{j=1}^{n} (1 - a_j^*) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

erklärte Folge $\{a_n^*\}$ nicht regulär. Die Voraussetzung (7) des Satzes 1 ist auch nicht erfüllt. Es folgt nämlich aus $s^*_{n_k+q_1+\cdots+q_k} = s_{n_k+1}$ und aus (32) die Ungleichung

$$\frac{s^*_{n_k+q_1+\cdots+q_k}}{n_k+q_1+\cdots+q_k} \leqq \frac{s_{n_k+1}}{q_k} < \frac{1}{k} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

also

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{s_N^*}{N} = 0,$$

was angesichts von

$$\sqrt[N]{\prod_{n=1}^{N}(1-a_N^*)} = e^{-\frac{s_N^*}{N}}$$

die Beziehung

$$\limsup_{N\to\infty} \sqrt[N]{\prod_{n=1}^{N}(1-a_n^*)} = 1$$

liefert.

(b) Sei $\{s_n\}$ eine in sich Poissonsche Folge. Wir bestimmen die Indizes $n_1<n_2<\cdots$ derart, daß

$$s_{n_{k+1}} > k^2 \qquad (k=1, 2, \ldots) \tag{37}$$

und

$$\lim_{k\to\infty}(s_{n_k+1} - s_{n_k}) = \infty \tag{38}$$

sei. Wir setzen

$$\tilde{s}_n = s_n \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots, n_1$$

und

$$\tilde{s}_n = \sum_{r=1}^{k} s_{n_r} + s_n \quad \text{für} \quad n = n_k+1, \ldots, n_{k+1}; \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{39}$$

Damit haben wir eine in sich Poissonsche Folge $\{\tilde{s}_n\}$ erklärt. Dies ergibt sich daraus, daß für jedes Intervall I und jedes $n \geqq n_{k_0}$ (wo k_0 das kleinste k ist, für welches $s_{n_k+1} - s_{n_k} > |I|$ gilt) der Term $\tilde{s}_r$ dann und nur dann zu $\tilde{s}_n + I$ gehört, wenn s_r zu $s_n + I$ gehört.

Sei $B(I;0)$ die Menge solcher t, für welche in $t+I$ keine Terme der Folge $\{\tilde{s}_n\}$ vorkommen. Sei r_0 eine natürliche Zahl und $r_0 \geqq \sqrt{|I|}$. Dann ergeben (37) und (39) die Ungleichung

$$\tilde{s}_{n_k+1} - \tilde{s}_{n_k} = s_{n_k+1} > k^2 \geqq r_0^2 \geqq |I| \qquad (k \geqq r_0), \tag{40}$$

welche die Inklusion

$$B(I;0) \cap \{t: 0 \leqq t \leqq \tilde{s}_{n_k+1}\} \supset \bigcup_{r=r_0}^{k} \{t: s_{n_r} < t < s_{n_r+1} - |I|\} \qquad (k \geqq r_0)$$

nach sich zieht. Daraus und aus (40) folgt die Ungleichung

$$|B(I;0) \cap \{t: 0 \leqq t \leqq \tilde{s}_{n_k+1}\}| \geqq \sum_{r=r_0}^{k} s_{n_r+1} - k|I| \qquad (k = r_0). \tag{41}$$

(37) und (39) führen zu den Ungleichungen

$$\tilde{s}_{n_k+1} = \sum_{r=1}^{k} s_{n_r} + s_{n_k+1} \leqq 2\sum_{r=1}^{k} s_{n_r+1}, \quad \tilde{s}_{n_k+1} \geqq s_{n_k+1} > k^2 \qquad (k=1, 2, \ldots),$$

welche mit (41) die Abschätzung

$$|B(I;0)\cap\{t:\ 0\leqq t\leqq \tilde{s}_{n_k+1}\}|\geqq \tfrac{1}{2}\,\tilde{s}_{n_k+1}-|I|\,]\tilde{s}_{n_k+1}-\sum_{r=1}^{r_0}\tilde{s}_{n_r+1}\qquad (k\geqq r_0)$$

ergeben. Es ist also

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\,|B(I;0)\cap\{t:\ 0\leqq t\leqq T\}|\geqq\frac{1}{2}$$

für jedes I. Daraus folgt aber, daß $\{\tilde{s}_n\}$ keine Poissonsche Folge ist, denn für derartige Folgen besteht die Beziehung

$$|B(I;0)|_R=e^{-|I|}.$$

IV.

Dieser Teil bringt gewisse hinreichende Bedingungen dafür, daß eine Signalfolge eine in sich Poissonsche Folge sei.

Eine Zahlenfolge $\{c_n\}$ nennen wir *unabhängig*, wenn für beliebige Systeme reeller Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ die Gleichheit

$$\mathrm{fr}\bigcap_{j=1}^{k}\{n:\ c_{n+j}<x_j\}=\prod_{j=1}^{k}\mathrm{fr}\{n:\ c_{n+j}<x_j\}$$

besteht, und die Funktion

$$F(x)=\mathrm{fr}\{n:\ c_n<x\}$$

eine Verteilungsfunktion ist, das heißt eine nichtabnehmende, linksseitig stetige Funktion mit

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,\qquad \lim_{x\to\infty}F(x)=1.$$

Es sei $\{s_n\}$ eine Signalfolge, I ein Intervall. Die Anzahl der in das Intervall s_n+I fallenden Terme der Folge $\{s_n\}$ werde mit $Z_n(I)$ bezeichnet. Für jedes natürliche m werde $Z_n(I,m)$ durch

$$Z_n(I,m)=Z_n(I),\quad \text{wenn } Z_n(I)>m$$
$$Z_n(I,m)=0,\quad \text{wenn } Z_n(I)\leqq m,$$

erklärt.

Die Signalfolge $\{s_n\}$ nennen wir *zerstreut*, wenn man einem jeden Intervall I und jedem positiven ε ein natürliches m mit

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}Z_n(I,m)<\varepsilon$$

zuordnen kann.

Wir sagen, eine Signalfolge $\{s_n\}$ *messe* Intervalle, wenn die Beziehung

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}Z_n(I)=|I|$$

für jedes Intervall I statthat.

Satz 5. *Die Signalfolge $\{s_n\}$ sei zerstreut und messe Intervalle; die Folge $\{s_{n+1}-s_n\}$ sei unabhängig. Dann ist $\{s_n\}$ eine in sich Poissonsche Folge.*

Beweis. Führen wir die Bezeichnungen

$$c_1 = s_1, \qquad c_n = s_n - s_{n-1} \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{42}$$

$$\mathrm{fr}\{n\colon c_n < x\} = F(x). \tag{43}$$

ein. Aus $s_{n+1} \geqq s_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ folgt $F(0) = 0$. Aus der Unabhängigkeit von $\{c_n\}$ erhält man für $x > 0$

$$\mathrm{fr}\left\{n\colon \sum_{j=1}^{r} c_{n+j} < x,\ \sum_{j=1}^{r+1} c_{n+j} \geqq x\right\} = F_r(x) - F_{r+1}(x), \tag{44}$$

wo

$$F_1(x) = F(x), \qquad F_{r+1}(x) = \int_0^x F_r(x-u)\, dF(u) \qquad (r = 1, 2, \ldots). \tag{45}$$

Es sei $I_0 = \{t\colon 0 < t \leqq x\}$. Folgende Beziehungen sind leicht nachzuprüfen:

$$\sum_{n=1}^{N} Z_n(I_0) = \sum_{r=1}^{\infty} r\overline{\left\{n\colon \sum_{j=1}^{r} c_{n-j} < x,\ \sum_{j=1}^{r+1} c_{n-j} \geqq x,\ n \leqq N\right\}}, \tag{46}$$

$$\sum_{n=1}^{N} Z_n(I_0, m) = \sum_{r=m+1}^{\infty} r\overline{\left\{n\colon \sum_{j=1}^{r} c_{n-j} < x,\ \sum_{j=1}^{r+1} c_{n+j} \geqq x,\ n \leqq N\right\}}. \tag{47}$$

Die Folge $\{s_n\}$ ist laut Voraussetzung zerstreut. Es existiert also für jedes $\varepsilon > 0$ ein natürliches m_0 derart, daß

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Z_n(I_0, m_0) < \varepsilon.$$

Die Folge $\{s_n\}$ mißt aber Intervalle. Es ist daher

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Z_n(I_0) = x.$$

Daraus und aus (44), (46) und (47) erhalten wir die Ungleichung

$$x - \sum_{r=1}^{m_0} r\left(F_r(x) - F_{r+1}(x)\right) < \varepsilon,$$

welche für alle positiven ε gilt und demzufolge zu

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{r=1}^{n} F_r(x) - n F_{n+1}(x)\right) = \sum_{r=1}^{\infty} r\left(F_r(x) - F_{r+1}(x)\right) = x \tag{48}$$

für $x \geqq 0$ führt. Es ist also

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{r=1}^{n} \int_0^x \left(1 - F(x-u)\right) dF_r(u) - n \int_0^x \left(1 - F(x-u)\right) dF_{n+1}(u)\right)$$
$$= \int_0^x \left(1 - F(x-u)\right) du$$

für $x \geqq 0$. Die Bezeichnungen (45) gestatten diese Beziehung folgendermaßen auszudrücken:

$$(49) \quad F(x) + \lim_{n\to\infty} \left(n F_{n+2}(x) - (n+1) F_{n+1}(x)\right) = x - \int_0^x F(u)\, du \quad \text{für} \quad x \geqq 0.$$

Nun existiert für $x > 0$ ein natürliches r_0 mit

$$(50) \qquad F_{r_0}(x) < 1.$$

In der Tat, sollte für $r = 1, 2, \ldots$ stets $F_r(x) = 1$ sein, so hätten wir auf Grund von (48) $x = 0$. Aus (45) folgt unmittelbar

$$F_n(x) \leqq \left(F(x)\right)^{[n/r_0]} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

woraus mit Hilfe von (50) die Formel

$$\lim_{n\to\infty} \left(n F_{n+2}(x) - (n+1) F_{n+1}(x)\right) = 0 \quad \text{für} \quad x \geqq 0$$

gewonnen wird. Zieht man jetzt (49) heran, so sieht man, daß $F(x)$ die Integralgleichung

$$F(x) = x - \int_0^x F(u)\, du \qquad (x \geqq 0)$$

befriedigt, welche

$$(51) \qquad F(x) = 1 - e^{-x} \qquad (x \geqq 0)$$

als einzige Lösung besitzt.

Schreiben wir nun

$$(52) \qquad a_n = 1 - e^{-c_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_k$ reelle Zahlen mit $0 \leqq x_j < 1$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Aus der Beziehung

$$\bigcap_{j=1}^{k} \{n\colon a_{n+j} < x_j\} = \bigcap_{j=1}^{k} \{n\colon c_{n+j} < -\log(1 - x_j)\},$$

aus der Unabhängigkeit der Folge $\{c_n\}$ und aus (43) mit (51) gewinnen wir die Existenz der Frequenz

$$\mathrm{fr} \bigcap_{j=1}^{k} \{n\colon a_{n+j} < x_j\} = \prod_{j=1}^{k} x_j.$$

Damit ist die Regularität der Folge $\{a_n\}$ erwiesen. Aus (42) mit (52) bekommen wir

$$s_n = -\log \prod_{j=1}^{n} (1 - a_j) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

woraus durch Anwendung des Satzes 2 die Behauptung des Satzes 5 folgt

Literatur

[1] Kaczmarz, S., u. H. Steinhaus: Theorie der Orthogonalreihen. Warszawa und Lwów 1935. — [2] Korobow, N. M.: Über einige Fragen der Gleichverteilung. [Russisch.] Izwestija Akad. Nauk SSSR., ser. mat. **14**, 215—238 (1950). — [3] Korobow, N. M.: Zahlen mit beschränkten Quotienten und deren Anwendungen auf das Problem der diophantischen Approximation. [Russisch.] Izwestija Akad. Nauk SSSR., ser. mat. **19**, 361—380 (1955). — [4] Postnikow, A. G.: Ein Kriterium für perfekt gleichverteilte Folgen. [Russisch.] Doklady Akad. Nauk SSSR. **120**, 973—976 (1958). — [5] Sierpiński, W.: Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Borel sur les nombres absolument normaux et détermination effective d'un tel nombre. Bull. Soc. Math. France **45**, 125—132 (1917). — [6] Starczenko, L. P.: Konstruktion von Folgen, die mit einer gegebenen normal sind. [Russisch.] Izwestija Akad. Nauk SSSR., ser. mat. **22**, 757—770 (1958). — [7] Steinhaus, H.: Sur la probabilité de la convergence de séries. Studia Math. **2**, 21—39 (1930). — [8] Steinhaus, H.: Sur la courve péanienne de W. Sierpiński. Commentarii Math. Helvetici **9**, 166—169 (1936/37). — [9] Urbanik, K.: Effective processes in the sense of H. Steinhaus. Studia Math. **17**, 335—348 (1958).

Mathematisches Institut der Polnischen Akademie der Wissenschaften, Warschau (Polen)

(Eingegangen am 23. März 1959)

Morrey jr., C. B.
Math. Zeitschr. 72, 146—164 (1959)

Second Order Elliptic Equations in Several Variables and Hölder Continuity

In memoriam Leon Lichtenstein

By
Charles B. Morrey jr.

1. *Introduction.* In this paper, we discuss the Hölder continuity of the solutions of equations of the form

$$(1.1)\quad \int_G [v_{,\alpha}(a^{\alpha\beta}u_{,\beta}+b^{\alpha}u+e^{\alpha})+v(c^{\alpha}u_{,\alpha}+du+f)]\,dx=0 \quad \text{for all } v\in H^1_{2,0}$$

on G where we assume that the $a^{\alpha\beta}$ are bounded and measurable and satisfy the uniform ellipticity condition (2.3), the coefficients b^{α} and $c^{\alpha}\in L_{2p}$ and $d\in L_p$ for some $p>\nu/2$ (ν being the number of variables x), the $e^{\alpha}\in L_2$ and $f\in L_1$, and e and f satisfy certain integral growth conditions (see §§ 3, 4). In the equations (1.1), the tensor summation convention is assumed, as will be done throughout, the Greek letters running from 1 to ν; the subscripts after the commas denote differentiation.

In 1938, the writer [6] studied the solutions of (1.1) in the case where $\nu=2$ and the coefficients b^{α}, c^{α}, d and f were zero and showed that they were Hölder continuous on the interior provided that the e^{α} satisfied the corresponding integral growth condition; some results concerning boundary behavior were also obtained. Later [7], the writer generalized the results for the interior to systems of equations of the type (1.1) in which all the terms were present but ν still was 2; the restrictions on the b^{α}, c^{α}, and d made in that work were somewhat weaker than those made in this paper. The motivation for the study of equations with such general coefficients was that of proving certain differentiability properties of the solutions of a class of variational problems.

The methods used by the writer in this work were peculiar to the case $\nu=2$ and neither he nor anyone else was able to generalize the results to cases where $\nu>2$ (except in some special cases) until De Giorgi [2, 3] and Nash [10, 11] concurrently and independently showed that "a-harmonic" functions in any number of variables are Hölder continuous on compact subsets of their domains of definition; a function is *a-harmonic* on a domain G if and only if it is in H^1_2 and satisfies $I_0(u, v; E)=0$ (see (2.7)) for each domain E with E compact and $E<G$ and each $v\in H^1_{2,0}$ on E. The methods of Nash and De Giorgi are completely unrelated- Nash obtained his results as a by-product of his work on parabolic equations, whereas De Giorgi's method involves only elliptic equations. Nash confined himself to bounded solutions

whereas De Giorgi allowed solutions merely in L_2; since functions in H_2^1 are not necessarily bounded, the starting point for our investigations is the paper of De Giorgi [3] which we discuss in § 2.

Very recently, Stampacchia [13] studied equations of the type (1.1) in which the $b^\alpha \equiv 0$, the c^α and d are bounded, and $d(x) \geqq 0$. He showed that the solutions in $H_{2,0}^1$ or those satisfying the "homogeneous Neumann" boundary conditions or even certain mixed boundary conditions are bounded on G, provided that G is of his "type S", i.e. if ∂G satisfies an interior "strong cone" condition. In this paper, we show, first of all, that the eigenvalue problem for equations (1.1) has discrete eigenvalues with the usual Fredholm alternative holding for any given parameter value (see Theorem 4.1), provided G is bounded and then that the solutions u are Hölder-continuous on compact subsets of G if e and f satisfy proper integral growth conditions (see §§ 3, 4). In case G is of type $S^*(\alpha, a)$ (see § 5) and e and f satisfy proper growth conditions across ∂G, then the solutions u in $H_{2,0}^1$ (see below) are Hölder-continuous on G and vanish in the ordinary sense on ∂G; the same result holds if G is a Lipschitz domain (see § 5). Thus our results are generalizations of those of Nash and De Giorgi and are partial generalizations of those of Stampacchia. It is interesting that the domains of class $S^*(\alpha, a)$ are identical with the types of domains for which Nash ([11] appendix) proved the Hölder continuity of a-harmonic functions on G, assuming that the given boundary values are Hölder-continuous.

We now introduce our notations: If G is a domain, ∂G denotes its boundary. $B(x_0, r)$ denotes the ν-ball with the center at x_0 and radius r. If S is a set in ν-space, $|S|$ denotes its ν-measure; however, occasionally we consider subsets S of $\Sigma = \partial B(0, 1)$ in which case $|S|$ means its $(\nu-1)$-measure. We define $\gamma_\nu = |B(0, 1)|$, $\Gamma_\nu = |\partial B(0, 1)|$; clearly $\Gamma_\nu = \nu\gamma_\nu$. If u is a function (or vector function), ∇u denotes its gradient, $\nabla^2 u$ denotes its second gradient $u_{,\alpha\beta}$, etc. If φ is any function, vector, or tensor, $|\varphi|$ denotes its length (the square root of the sum of the squares of its components). All integrals are Lebesgue integrals. The spaces L_p over some set have their usual meaning. The space H_2^1 over the domain G is the closure of the space of C' functions on G according to the norm

$$(\|u\|_p^1)^p = \int_G [|u|^2 + |\nabla u|^2]^{p/2}\, dx.$$

The space $H_{p,0}^1$ is the subspace of H_p^1 obtained by closing the space of functions of class C' having compact support interior to G. For such functions, we define a topologically equivalent norm

$$(\|u\|_{p,0}^1)^p = \int_G |\nabla u|^p\, dx.$$

If $p = 2$, the spaces H_2^1 and $H_{2,0}^1$ are Hilbert spaces and

$$(u, v)_2^1 = \int_G (\nabla u \cdot \nabla v + u v)\, dx, \qquad (u, v)_{2,0}^1 = \int_G \nabla u \cdot \nabla v\, dx.$$

We define

$$D(u, G) = \int_G |\nabla u|^2\, dx, \qquad d(u, G) = [D(u, G)]^{1/2}.$$

There are many results which are inequalities involving a constant which may depend on various other constants; we denote all these constants by C but do not assume that all these constants are the same.

2. *The De Giorgi lemmas and theorems; a-harmonic functions.* In this section, we quote the lemmas and relevant theorems of DE GIORGI, which are proved in [3], and then prove important Dirichlet growth theorems for a-harmonic functions and H_2^1 functions in general. We begin with DE GIORGI's definition of his $\mathfrak{B}(E;\gamma)$ classes:

DEFINITION. Suppose E is a domain and $\gamma>0$. A function $u\in\mathfrak{B}(E;\gamma)$ if and only if $u\in L_2$ on E, $u\in H_2^1$ on domains $\overline{D}$ with $\overline{D}$ compact and $D\subset E$ and if

$$\int\limits_{A(k)\cap B(x_0,\varrho_1)} |\nabla u|^2\,dx \leqq \frac{\gamma}{(\varrho_2-\varrho_1)^2} \int\limits_{A(k)\cap B(x_0,\varrho_2)} [u(x)-k]^2\,dx$$

$$\int\limits_{B(k)\cap B(x_0,\varrho_1)} |\nabla u|^2\,dx \leqq \frac{\gamma}{(\varrho_2-\varrho_1)^2} \int\limits_{B(k)\cap B(x_0,\varrho_2)} [u(x)-k]^2\,dx$$

for all k, x_0, ϱ_1, and ϱ_2 for which $0<\varrho_1<\varrho_2$ and $B(x_0,\varrho_2)\subset E$; here $A(k)$ is the set where $u(x)>k$ and $B(k)$ is the set where $u(x)<k$.

LEMMA I. *Each class $\mathfrak{B}(E;\gamma)$ is closed with respect to strong convergence in L_2.*

LEMMA II. *There is a constant $\beta_1(\nu)>0$ such that*

$$\beta_1 \int\limits_{A(k;\varrho)-A(\lambda;\varrho)} |\nabla u|\,dx \geqq (\lambda-k)\,[\tau(k,\lambda;\varrho)]^{(\nu-1)/\nu} \tag{2.1}$$

whenever $u\in H_2^1$ on $B(x_0,\varrho)$ and $\lambda>k$. Here $\tau(k,\lambda;\varrho)$ indicates the smaller of $|A(\lambda;\varrho)|$ and $|B(x_0,\varrho)-A(k;\varrho)|$ and $A(k;\varrho)=A(k)\cap B(x_0;\varrho)$, etc.

LEMMA III. *There is a constant $\beta_2(\nu)>0$ such that*

$$\int\limits_{A(k;\varrho)} [u(x)-k]^2\,dx \leqq \beta_2 |A(k;\varrho)|^{2/\nu} \int\limits_{A(k;\varrho)} |\nabla u|^2\,dx \tag{2.2}$$

whenever $u\in H_2^1$ on $B(x_0,\varrho)$ and $|A(k;\varrho)|\leqq|B(x_0;\varrho)|/2$.

LEMMA IV. *There is a function $\vartheta(\sigma;\nu,\gamma)$ which is defined and positive for $0<\sigma<1$ such that if $u\in\mathfrak{B}(E;\gamma)$, $B(x_0;\varrho)\subset E$, and for some k we have*

$$|A(k;\varrho)|<\varrho^\nu\,\vartheta(\sigma;\nu,\gamma)$$

then

$$|A(k+\sigma c;\varrho-\sigma\varrho)|=0,$$

where

$$c\geqq 0 \quad \text{and} \quad c^2=(\varrho^\nu\vartheta)^{-1}\int\limits_{A(k;\varrho)}[u(x)-k]^2\,dx.$$

REMARK. From Lemma IV, it follows that if $u\in\mathfrak{B}(E;\gamma)$ then u is (essentially) bounded on compact subsets of E.

LEMMA V. *There exists a number $\eta=\eta(\nu,\gamma)>0$ such that if $u\in\mathfrak{B}(E;\gamma)$ and $B(x_0;4\varrho)\subset E$, then*

$$\operatorname{osc}(u;\varrho)\leqq(1-\eta)\operatorname{osc}(u;4\varrho),$$

where $\operatorname{osc}(u;r)$ *denotes the* (essential) *oscillation on* $B(x_0;r)$.

THEOREM I. *Any function $u \in \mathfrak{B}(E;\gamma)$ satisfies a uniform Hölder condition with exponent $\lambda(\nu,\gamma)>0$ on any compact subset of E.*

THEOREM II. *If the coefficients $a^{\alpha\beta}$ are bounded and measurable on E and satisfy $a^{\alpha\beta}=a^{\beta\alpha}$ and*

$$(1-h)\,|\xi|^2 \leqq a^{\alpha\beta}(x)\,\xi^\alpha\,\xi^\beta \leqq (1+h)\,|\xi|^2, \qquad x\in E,\ 0<h<1, \tag{2.3}$$

and all ξ, then any a-harmonic function in L_2 on $E \in \mathfrak{B}(E,\gamma)$ where

$$\gamma = (1+h)^2\,(1-h)^{-2}. \tag{2.4}$$

We now prove

THEOREM 2.1. *If $u \in L_2$ and is a-harmonic on $B(x_0,a)$ then*

$$d[u;B(x_0;r)] \leqq (1+h)\,(1-h)^{-1}\,(a-r)^{-1}\,|u|_2^0, \qquad 0 \leqq r < a. \tag{2.5}$$

If u is also in H_2^1 on $B(x_0,a)$, then

$$d[u;B(x_0;r)] \leqq C(\nu,h)\cdot d[u;B(x_0;a)]\cdot (r/a)^{\tau-1+\lambda_0} \tag{2.6}$$

where

$$\lambda_0 = \lambda[\nu,(1+h)\,(1-h)^{-1}], \qquad \tau = \nu/2.$$

If $u^* \subset H_2^1$ on a bounded domain E, there is a unique a-harmonic function u on E such that $u-u^* \in H_{2,0}^1$ on E.

Proof. The first statement follows from the definitions and the last is proved by the usual lower-semicontinuity argument for minimizing the integral $I_0(u,u;E)$, where

$$I_0(u,v;E) = \int_E v_{,\alpha}\,a^{\alpha\beta}\,u_{,\beta}\,dx. \tag{2.7}$$

Or one can set $u=u^*+U$ and look for a solution U in $H_{2,0}^1$ of the non-homogeneous equation as in the proof of Theorem 3.2.

Next, let $\{u_n\}$ be any sequence of a_n-harmonic functions on $B(0,1)$ with $d[u_n;B(0,1)]$ uniformly bounded and where the a_n all satisfy (2.3) with the same h; we may as well assume that the average $\overline{u}_n$ of u_n over $B(0,1)$ is zero. Then by RELLICH'S theorem

$$|u_n|_2^0 \leqq C_2(\nu)\,d[u_n;B(0,1)].$$

We may also assume that $u_n \rightharpoonup u$ in H_2^1 on $B(0,1)$. Then u is also in $\mathfrak{B}(E,\gamma)$ where γ is given by (2.4) and $E=B(0,1)$. Let us choose any ϱ and σ with $0<\varrho,\sigma<1$. There is a k such that $|A(k;\varrho)|<\varrho^\nu\vartheta(\sigma;\nu,\gamma)$ and $|B(-k,\varrho)|<\varrho^\nu\vartheta(\sigma;\nu,\gamma)$ for the limit function u. For those k, ϱ, and σ, we see from the strong convergence in L_2 of u_n to u that these inequalities hold for all sufficiently large n. Accordingly the u_n and u are all uniformly bounded on $B(0,\varrho\sigma)$ and so $u_n(0)$ and $u(0)$ are uniformly bounded. From Lemma V, it follows, then, that

$$|u(x)| \leqq C(\nu,h)\,d[u,B(0,1)],$$

$$|u(x)-u(0)| \leqq C(\nu,h)\,d[u;B(0,1)]\cdot|x|^{\lambda_0}, \qquad |x| \leqq \tfrac{1}{2}$$

for every a-harmonic function u where the $a^{\alpha\beta}$ satisfy (2.3).

From the closure theorem, we may assume that the $a^{\alpha\beta} \in C^\infty$ so the a-harmonic functions are. Thus we have (u a-harmonic)

$$(1-h)\,D[u, B(0,r)] \leqq I_0[u, u; B(0,r)] = \int_{\partial B(0,r)} (u-u_0)\, a^{\alpha\beta} n_\alpha u_{,\beta}\, dS$$

$$\leqq \Big[\int_{\partial B(0,r)} (u-u_0)^2 a^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta\, dS\Big]^{\frac{1}{2}} \Big[\int_{\partial B(0,r)} a^{\alpha\beta} u_{,\alpha} u_{,\beta}\, dS\Big]^{\frac{1}{2}} \qquad (\tau = \nu/2)$$

$$\leqq (1+h)\,\gamma_\nu^{\frac{1}{2}} r^{\tau+\lambda_0} \cdot [\varphi'(r)]^{\frac{1}{2}} [\varphi(1)]^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi(r) = D[u, B(0,r)],$$

$$u_0 = u(0), \qquad 0 \leqq r \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Hence

$$\varphi^{-2} \cdot \varphi' \geqq C(\nu, h)\,[\varphi(1)]^{-1} r^{-\tau-\lambda_0}, \qquad 0 \leqq r \leqq \tfrac{1}{2}$$

$$\varphi^{-1}(r) \geqq \varphi^{-1}(\tfrac{1}{2})\,[1 + \varphi(\tfrac{1}{2})\, C\, \varphi^{-1}(1)\, (r^{1-\tau-\lambda_0} - 2^{\tau+\lambda_0-1})]$$

$$\therefore \varphi(r) \leqq C(\nu, h)\,\varphi(1) \cdot r^{\tau+\lambda_0-1}, \qquad 0 \leqq r \leqq 1.$$

But now, if u is a-harmonic on a sphere $B(x_0, R)$, the function u' defined by $u'(y) = u(x_0 + Ry)$ is 'a-harmonic on $B(0,1)$, where $'a^{\alpha\beta}(y) = a^{\alpha\beta}(x_0 + Ry)$ and the $'a^{\alpha\beta}$ clearly satisfy (2.3) with the same h. The result (2.6) then follows using homogeneity argument.

The following "Dirichlet growth" theorem is well known (see, for instance [8], p. 111 or [7], pp. 12, 13).

THEOREM 2.2. *If $u \in H_2^1$ on G and satisfies*

$$d[u, B(x_0, r)] \leqq L(r/\delta)^{\tau-1+\lambda}, \qquad 0 < \lambda < 1,\ 0 \leqq r \leqq \delta$$

for each x_0 in G, δ being the distance of x_0 from ∂G, then u satisfies a uniform Hölder condition with exponent λ on any compact subset of G and satisfies

$$|u(x) - u(x_0)| \leqq C(\nu, \lambda) \cdot L \cdot \delta^{1-\tau-\lambda} \cdot |x - x_0|^\lambda \quad \text{if} \quad |x - x_0| \leqq \delta/2,$$

$$B(x_0, \delta) \subset G.$$

3. *A special case.* In this section, we study the solutions of equations of the form

$$\int_G [v_{,\alpha}(a^{\alpha\beta} u_{,\beta} + e^\alpha) + vf]\, dx = 0 \qquad \text{for all } v \in H_{2,0}^1 \text{ on } G, \tag{3.1}$$

where we assume that the $a^{\alpha\beta}$ are bounded and measurable and satisfy (2.3) for some h.

LEMMA 3.1. *If S is any set of finite measure and $\sigma > 0$, then*

$$\int_S |\xi - x|^{\sigma-\nu}\, d\xi \leqq \Gamma \sigma^{-1} s^\sigma \quad \textit{where} \quad \gamma_\nu s^\nu = |S|.$$

Proof. For obviously

$$\int_S |\xi - x|^{\sigma-\nu}\, d\xi \leqq \int_{B(x,s)} |\xi - x|^{\sigma-\nu}\, d\xi.$$

LEMMA 3.2. *If $u \in H_{p,0}^1$ on the bounded domain G for some $p \geqq 1$, then*

$$u(x) = -\Gamma_\nu^{-1} \int_G |\xi - x|^{-\nu} (\xi^\alpha - x^\alpha)\, u_{,\alpha}(\xi)\, d\xi \tag{3.2}$$

for almost all x in G.

Proof. If u is of class C' and has support in G, $x \in G$, and r is the distance from x, then

$$u(x) = -\int_0^R u_r[x + r\zeta(\vartheta)]\, dr \qquad (\zeta \in \partial B(0,1)) \tag{3.3}$$

where we assume $B(x, R) \supset G$ and $u(\xi) = 0$ for $\xi \in B(x, R) - G$. Then (3.2) follows by averaging over $\partial B(0, 1)$. From (3.2), we see that

$$|u(x)| \leqq \Gamma_\nu^{-1} \int_G |\xi - x|^{1-\nu} \cdot |\nabla u(\xi)|\, d\xi \tag{3.4}$$

(u of class C' as above). From the Hölder inequality we see that

$$|u(x)|^p \leqq \Gamma_\nu^{-1} \left[\Gamma_\nu^{-1} \int_G |\eta - x|^{1-\nu}\, d\eta\right]^{p-1} \int_G |\xi - x|^{1-\nu} |\nabla u(\xi)|^p\, d\xi. \tag{3.5}$$

By integrating over G, we find that

$$\int_G |u(x)|^p\, dx \leqq g^p \cdot \int_G |\nabla u(\xi)|^p\, d\xi \qquad \text{where} \qquad \gamma_\nu g^\nu = |G|. \tag{3.6}$$

Thus the formula (3.2) holds in general by approximations.

Definition. Suppose $f \in L_1$ on G. We define its *potential* by

$$V(x) = -(\nu - 2)^{-1} \Gamma_\nu^{-1} \int_G |\xi - x|^{2-\nu} f(\xi)\, d\xi. \tag{3.7}$$

Remark. The following theorem enables us to reduce the general equations (3.1) to ones where $f = 0$, provided the original f satisfies (3.8).

Theorem 3.1*). *Suppose that $f \in L_1$ on G and satisfies*

$$\int_{G \cap B(x_0, r)} |f(\xi)|\, d\xi \leqq L r^{\nu - 2 + \lambda}, \qquad 0 < \lambda < 1, \tag{3.8}$$

for each sphere $B(x_0, r)$, suppose V is the potential of f, and suppose $v \in H^1_{2,0}$ on G. Then $V \in H^1_2$ on any bounded domain and satisfies

$$\int_{B(x_0, r)} |\nabla V(x)|^2\, dx \leqq C^2(\nu, \lambda) \cdot L^2 r^{\nu - 2 + 2\lambda} \qquad x_0 \in G, \qquad 0 \leqq r \leqq R \tag{3.9}$$

where R is the diameter of G. Moreover

$$\int_G v(x) f(x)\, dx = -\int_G v_{,\alpha}(x)\, V_{,\alpha}(x)\, dx. \tag{3.10}$$

Proof. It is straightforward to show that $V \in L_1$ on any cell and (by integrating the expression for $V_{,\alpha}(x)$, using Fubini's theorem, etc.) is absolutely continuous along almost all lines in each coordinate direction with partial derivatives given by

$$V_{,\alpha}(x) = -\Gamma_\nu^{-1} \int_G |\xi - x|^{-\nu} (\xi^\alpha - x^\alpha) f(\xi)\, d\xi \tag{3.11}$$

almost everywhere.

*) Compare [7], pp. 61—64.

Now, we select $x_0 \in G$ and we write

$$f(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\xi) \quad \text{where} \quad f_1(\xi) = f(\xi) \text{ in } B(x_0, 2r)$$

and $f_1(\xi) = 0$ elsewhere and let V_k be the potential of f_k. Let

$$\varphi_2(\varrho; x) = \int_{B(x,\varrho) \wedge [G - B(x_0, 2r)]} |f(\xi)|\, d\xi. \tag{3.12}$$

Then, from (3.11) for V_2, we have

$$\begin{aligned} |\nabla V_2(x)| &\leqq \Gamma_\nu^{-1} \int_{G - B(x_0, 2r)} |\xi - x|^{1-\nu} |f(\xi)|\, d\xi \\ &= \Gamma_\nu^{-1} \int_r^R \varrho^{1-\nu} \varphi_2'(\varrho; x)\, d\varrho \\ &\leqq L \Gamma_\nu^{-1} \left[R^{\lambda-1} + (\nu - 1) \int_r^R \varrho^{\lambda-2} d\varrho \right] \\ &\leqq (\nu - 1) \Gamma_\nu^{-1} (1 - \lambda)^{-1} L r^{\lambda-1}, \qquad x \in B(x_0; r) \end{aligned}$$

since, obviously

$$\varphi_2(\varrho; x) \leqq \begin{cases} 0, & 0 \leqq \varrho \leqq r \\ L \varrho^{\nu-2+\lambda} & r \leqq \varrho \leqq R \end{cases} \qquad \big(x \in B(x_0; r)\big).$$

Accordingly

$$\int_{B(x_0, r)} |\nabla V_2(x)|^2\, dx \leqq C(\nu, \lambda)\, L^2 r^{\nu-2+2\lambda}. \tag{3.13}$$

From the Schwarz inequality, we obtain

$$|\nabla V_1(x)|^2 \leqq \Gamma_\nu^{-1} I_1 I_2, \quad \text{where} \quad 0 \leqq \sigma < \lambda \quad \text{and} \tag{3.14}$$

$$I_1 = \Gamma_\nu^{-1} \int_{B(x_0, 2r)} |\xi - x|^{\sigma-\nu} |f(\xi)|\, d\xi,$$

$$I_2 = \int_{B(x_0, 2r)} |\xi - x|^{2-\nu-\sigma} |f(\xi)|\, d\xi$$

since $f_1(\xi) = 0$ outside $B(x_0, 2r)$. In order to evaluate I_2 define

$$\varphi_1(\varrho; x) = \int_{B(x,\varrho) \wedge B(x_0, 2r) \wedge G} |f(\xi)|\, d\xi.$$

Then we see that

$$\varphi_1(\varrho; x) \leqq \begin{cases} L \varrho^{\nu-2+\lambda}, & 0 \leqq \varrho \leqq r \\ L (2r)^{\nu-2+\lambda} & \varrho \geqq r, \end{cases} \qquad x \in B(x_0; r).$$

Proceeding as with φ_2, we see that

$$I_2 \leqq [(\nu - 2 - \sigma)(\lambda - \sigma)^{-1} + 2^{\nu-2+\lambda}]\, L r^{\lambda-\sigma}. \tag{3.15}$$

Integrating (3.14) over $B(x_0, r)$ and using (3.15), we see that

$$\int_{B(x_0, r)} |\nabla V_1(x)|^2\, dx \leqq \sigma^{-1} (2r)^\sigma L (2r)^{\nu-2+\lambda} C(\nu, \lambda, \sigma)\, L r^{\lambda-\sigma}.$$

Since this holds for any σ with $0<\sigma<\lambda$, we see that

$$\int_{B(x_0,r)} |\nabla V_1(x)|^2 \, dx \leqq C(\nu, \lambda)\, L^2 r^{\nu-2+2\lambda}. \tag{3.16}$$

Using (3.11), we see that

$$-\int_G v_{,\alpha}(x)\, V_{,\alpha}(x)\, dx = \Gamma_\nu^{-1} \int_G \int_G |\xi - x|^{-\nu} (\xi^\alpha - x^\alpha)\, v_{,\alpha}(x)\, f(\xi)\, dx\, d\xi$$
$$= \int_G v(\xi)\, f(\xi)\, d\xi$$

using Lemma 3.2 (with x and ξ interchanged).

THEOREM 3.2. *If G is a domain $\subset B(x_0, R)$, $e \in L_2$ on G, and f satisfies (3.8) on G, there exists a unique solution u in $H^1_{2,0}$ on G of (3.1). Moreover*

$$\|u\|^1_{2,0} \leqq (1-h)^{-1} \left(\|e\|^0_2 + C_2 L R^{\nu-1+\lambda}\right). \tag{3.17}$$

Proof. On account of (2.3), we see that the inner product $I_0(u, v; G)$ [see (2.7)] leads to a norm which is topologically equivalent to $\|u\|^1_{2,0}$. Since

$$\int_G (e^\alpha v_{,\alpha} + fv)\, dx = \int_G v_{,\alpha} (e^\alpha - V_{,\alpha})\, dx \tag{3.18}$$

is a linear functional in $H^1_{2,0}$, we conclude the existence of a unique solution u of (3.1) from Hilbert space theory. Setting $v = u$ in (3.1) and using (2.3), (3.18), etc., we obtain

$$(1-h)\, (\|u\|^1_{2,0})^2 \leqq \left| \int_G u_{,\alpha} (e^\alpha - V_{,\alpha})\, dx \right| \leqq \|u\|^1_{2,0} \left(\|e\|^0_2 + |\nabla V|^0_2\right)$$

from which (3.17) follows, on account of Theorem 3.1.

THEOREM 3.3. *Suppose $u \in H^1_{2,0}$ and satisfies (3.1) on $G = B(x_0, a)$ where $f = 0$ and $e \in L_2$ on $B(x_0, a)$ with*

$$\int_{B(x_0,r)} |e(x)|^2 \, dx \leqq L^2 (r/a)^{\nu-2+2\lambda}, \quad 0 < \lambda < \lambda_0,\ 0 \leqq r \leqq a. \tag{3.19}$$

Then

$$\int_{B(x_0,r)} |\nabla u(x)|^2 \, dx \leqq C(\nu, h, \lambda) \cdot L^2 (r/a)^{\nu-2+2\lambda} \quad 0 \leqq r \leqq a. \tag{3.20}$$

If $u \in H^1_2$ on $B(x_0; a)$ and e satisfies (3.19), then (3.20) holds with L replaced by $L + d[u; B(x_0, a)]$.

Proof. The last statement follows from the first, since we may write $u = U + H$ where H is the a-harmonic function coinciding with u on $\partial B(x_0, a)$. Then $U \in H^1_{2,0}$ and is a solution of (3.1) with the same e and f, so U satisfies (3.20). Moreover

$$I_0[u, u; B(x_0, a)] = I_0[U, U; B(x_0, a)] + I_0[H, H; B(x_0, a)]. \tag{3.21}$$

The result for u then follows from Theorem 2.1.

In order to prove the first statement*), let

$$\varphi(s) = \sup L^{-1} d[u, B(x_0, Rs)]$$

*) Cf. The proofs of Lemma 2.1 and Theorem 2.2 in [8].

for all e satisfying (3.19) with a replaced by R, where $0<R\leqq a$ and u is th solution of (3.1) ($f=0$) in $H^1_{2,0}$ on $B(x_0, R)$. Then, choose any e satisfyin (3.19) and $0<r<R<a$ and write $u=U+H$ on $B(x_0, R)$ where H is th a-harmonic function $=u$ on $\partial B(x_0, R)$. Then (3.21) holds, so that

$$d[H; B(x_0, R)] \leqq C(h)\, d[u; B(x_0; R)] \leqq C\, L\, \varphi(R/a)$$

by the definition of φ. Also e satisfies

$$\int_{B(x_0,r)} |e(x)|^2\, dx \leqq L^2 (R/a)^{\nu-2+2\lambda} \cdot (r/R)^{\nu-2+2\lambda}.$$

Hence, if we apply Theorem 2.1 and the definition of φ, we obtain

$$\begin{aligned} d[u, B(x_0, r)] &\leqq d[H; B(x_0, r)] + d[U; B(x_0, r)] \\ &\leqq C\, L\, \varphi(R/a)\, (r/R)^{\tau-1+\lambda_0} + L(R/a)^{\tau-1+\lambda}\, \varphi(r/R). \end{aligned}$$

Since e was arbitrary, we see that

$$\varphi(s) \leqq t^{\tau-1+\lambda}\, \varphi(s/t) + C(\nu, h)\, \varphi(t)\, (s/t)^{\tau-1+\lambda_0} \qquad 0<s\leqq t\leqq 1. \tag{3.22}$$

Now it is clear from Theorem 3.2 that φ is non-decreasing for $0<s\leqq 1$ witl

$$\varphi(1) \leqq (1-h)^{-1}.$$

Next, choose σ with $0<\sigma<1$. Then, clearly

$$\varphi(s) \leqq S_0 s^{\tau-1+\lambda} \quad \text{for} \quad \sigma\leqq s\leqq 1 \quad \text{if} \quad S_0 = \varphi(1)\, \sigma^{1-\tau-\lambda}.$$

Applying (3.22) with $\sigma^2\leqq s\leqq\sigma$ and $t=\sigma^{-1}s$, we see that

$$\varphi(s) \leqq S_1 s^{\tau-1+\lambda} \quad \text{where} \quad S_1 = S_0(1+C\omega), \quad \omega = \sigma^{\lambda_0-\lambda}. \tag{3.23}$$

Since $S_1\geqq S_0$, we see that (3.23) holds for $\sigma^2\leqq s\leqq 1$. Applying (3.22) with $\sigma^4\leqq s\leqq\sigma^2$ and $t=\sigma^{-2}s$, we obtain

$$\varphi(s) \leqq S_2 s^{\tau-1+\lambda}, \quad S_2 = S_0(1+C\omega)(1+C\omega^2), \quad \sigma^4\leqq s\leqq 1.$$

By repeating the process, we find that

$$\varphi(s) \leqq S s^{\tau-1+\lambda}, \quad S = S_0(1+C\omega)(1+C\omega^2)(1+C\omega^4)\ldots, \quad 0<s\leqq 1.$$

The result follows.

4. *Existence theory and interior estimates for the general equations.* In this section, we study the solutions of the general equations (1.1) in which the $a^{\alpha\beta}$ satisfy (2.3), the b^α and $c^\alpha\in L_{2p}$ and $d\in L_p$ on G for some $p>\nu/2$; we cal these *general conditions*.

LEMMA 4.1. *If $u\in H^1_2$ on $B(x_0; a)$, there exists a function $U\in H^1_{2,0}$ on $B(x_0, 2a)$ such that $U(x)=u(x)$ on $B(x_0, a)$ and*

$$\left(|U|^2_{\frac{1}{2},0}\right) \leqq C^2(\nu)\left(|\nabla u|^2_0\right) + a^{-2}\left(|u|^2_0\right) = C^2(\nu)\left(|u|^2_{\frac{1}{2}}\right). \tag{4.1}$$

Proof. U is defined $=u$ on $B(x_0, a)$ and U is the harmonic function in $B(x_0, 2a) - B(x_0, a)$ coinciding with u on $\partial B(x_0, a)$ and vanishing on $\partial B(x_0, 2a)$

One verifies the result by introducing spherical harmonics (as in [4], for instance), and computing the result.

LEMMA 4.2. *If $u \in H^1_{r,0}$ for some r, $0 < r < \nu$, on some bounded domain G, or $\in H^1_r$ over the whole space then $u \in L_{r'}$ on G, where*

$$r' = \frac{\nu r}{\nu - r} \quad \text{and} \quad \|u\|^0_{r'} \leqq r \cdot \frac{\nu - 1}{\nu - r} \prod_{\alpha} \left(\|u_{,x}\|^0_r\right)^{1/\nu} \leqq r\,\nu^{-1}(\nu - 1)(\nu - r)^{-1}\|u\|^1_{r,0}.$$

Proof. This follows from the representation (3.2) in the first case and by a limit process in the second and from the theorems in [12].

LEMMA 4.3. *If $u \in H^1_{2,0}$ on a bounded domain G or if $u \in H^1_2$ on a sphere $G = B(x_0, a)$, then $u \in L_s$ and*

$$\|u\|^0_s \leqq C(\nu)\,\|u\|^1_{2,0} \quad \text{or} \quad C(\nu)'\,\|u\|^1_2, \quad \text{respectively, where} \quad s = 2\nu/(\nu - 2). \tag{4.2}$$

Proof. This follows from Lemma 4.2 for $u \in H^1_{2,0}$ and the second follows using Lemma 4.1.

LEMMA 4.4. *If $u \in H^1_{2,0}$ on the bounded domain G and $d \in L_p$ on G for some $p > \nu/2$, then $(d u^2) \in L_t$, where*

$$t = p\,\nu/(p\,\nu + \nu - 2p), \tag{4.3}$$

$$\|d\,u^2\|^0_t \leqq \|d\|^0_p \cdot \left(\|u\|^0_s\right)^2 \leqq C(\nu)\,\|d\|^0_p \left(\|u\|^1_{2,0}\right)^2, \tag{4.4}$$

$$\int_{B(x_0, r) \cap G} |d\,u^2|\,dx \leqq C(\nu)\,\|d\|^0_p \left(\|u\|^1_{2,0}\right)^2 r^{2\mu}, \qquad \mu = 1 - \nu/2p. \tag{4.5}$$

Proof. For, suppose $p', q' > 1$, $(p')^{-1} + (q')^{-1} = 1$. From the Hölder inequality we obtain

$$\|(d\,u^2)\|^0_t \leqq \|d\|^0_{tp'} \cdot \left(\|u\|^0_{2tq'}\right)^2.$$

The results follow by setting $tp' = p$ and $2tq' = s$ and then using Lemma 4.2.

LEMMA 4.5. *If $f \in L_q$ on a bounded domain G, where*

$$q = 2\nu/(\nu + 2) \tag{4.6}$$

then its potential $V \in H^1_2$ on any bounded domain Γ with

$$\int_{\Gamma} |\nabla V|^2\,dx \leqq C^2(\nu)\left(\|f\|^0_q\right)^2. \tag{4.7}$$

If, also f satisfies

$$\int_{B(x_1, r)} |f(x)|\,dx \leqq L\,\delta^{\nu - 1}(r/\delta)^{\nu - 2 + \lambda}, \qquad 0 \leqq r \leqq \delta, \tag{4.8}$$

$$B(x_1, \delta) \subset G, \quad L \geqq \|f\|^0_q \cdot \gamma_\nu^{1/s}$$

for all x_1 in G, then

$$\int_{B(x_1, r)} |\nabla V|^2\,dx \leqq C(\nu, \lambda)\,L^2(r/\delta)^{\nu - 2 + \lambda}, \qquad 0 \leqq r \leqq \delta. \tag{4.9}$$

Proof. From the results of CALDERON and ZYGMUND [1], it follows that $\nabla^2 V \in L_q$ over the whole space. From Lemma 4.2, the result (4.7) follows.

To prove the second result, choose a point $x_1 \in G$ and let δ be the distance of x_1 from ∂G. Write

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

where $f_2(x) = 0$ in $B(x_1, \delta/2)$ and $f_1(x) = 0$ in $G - B(x_1, \delta/2)$ and let V_k be the potential of f_k. Clearly $f_2 \in L_q$ with $\|f_2\|_q^0 \leqq \|f\|_q^0$ so its potential $V_2 \in H_2^1$ on any bounded Γ. But since V_2 is harmonic on $B(x_1, \delta/2)$, it satisfies a condition (4.9) with $\lambda = 1$ and $L = \|f\|_q^0$. Moreover, it is easy to see that f_1 satisfies the condition of Theorem 3.1 with that L replaced by $C(\nu, \lambda) L \delta^{1-\tau-\lambda}$ for every sphere $B(x_0, r)$, so that V_1 satisfies (4.9). The result follows.

We now define

$$(4.10) \quad \begin{cases} I(u, v; G) = \int_G [v_{,\alpha}(a^{\alpha\beta} u_{,\beta} + b^\alpha u) + v(c^\alpha u_{,\alpha} + d u)]\, dx, \\ J(u, v; G) = \int_G [v_{,\alpha} b^\alpha u + v(c^\alpha u_{,\alpha} + d u)]\, dx = I(u, v; G) - I_0(u, v; G) \\ K(u, v; G) = \int_G u v\, dx. \end{cases}$$

We shall first prove an existence theorem for equations of the form

$$(1.1') \quad \begin{cases} I(u, v; G) + \lambda K(u, v; G) = L(v) \qquad \text{for all } v \in H_{2,0}^1, \quad \text{where} \\ -L(v) = \int_G [e^\alpha v_{,\alpha} + f v]\, dx. \end{cases}$$

For $\lambda = 0$, the equations (1.1') reduce to (1.1). Let us define the transformations T_0, T_1, T_2 and the function w by

$$(T_0 u, v)_{2,0}^1 = I_0(u, v), \qquad (T_1 u, v)_{2,0}^1 = J(u, v), \qquad (T_2 u, v)_{2,0}^1 = K(u, v).$$
$$(w, v)_{2,0}^1 = L(v)$$

where we have assumed G fixed and bounded. Then the equation (1.1)' is equivalent to

$$(4.11) \qquad T_0 u + T_1 u + \lambda T_2 u = w.$$

THEOREM 4.1. *If G is a bounded domain and the coefficients satisfy our general conditions, then the equation (1.1)' has a unique solution u in $H_{2,0}^1$ for any e in L_2 and any f whose potential V is in H_2^1, provided that λ does not belong to an isolated set of characteristic values. If λ is characteristic, the homogeneous equation ($e^\alpha = f = 0$) has solutions $u \not\equiv 0$, the manifold of these being finite dimensional. For any λ, the Fredholm alternative holds.*

Proof. It is well-known (see [7] or [9], for instance) that $K(u, v)$ is completely continuous (i.e. continuous with respect to weak convergence in u and v). Next, suppose $u_n \rightharpoonup u$ and $v_n \rightharpoonup v$ in $H_{2,0}^1$ on G. Then, by Lemma 4.4 and our hypotheses, we see that $\|b u_n\|_{2t}$, $\|c v_n\|_{2t}$ and $\|d u_n\|_t$ are uniformly bounded. A simple argument involving subsequences of subsequences shows that $J(u, v)$ is also completely continuous. Hence T_1 and T_2 are completely continuous.

Next we see that there is a λ_0 such that

$$I_0(u,u)+J(u,u)+\lambda K(u,u)\geqq 2^{-1}(1-h)\left(\|u\|^1_{2,0}\right)^2 \qquad \text{if } \lambda\geqq\lambda_0.$$

For, if not, there is a sequence u_n with

$$\|u_n\|=1, \qquad I_0(u_n,u_n)+J(u_n,u_n)+n\,K(u_n,u_n)<2^{-1}(1-h). \tag{4.12}$$

A subsequence of $\{u_n\}$ converges weakly to some u and J_n and K_n converge to their values for that u. But since I_{0n}, J_n, and K_n are bounded, we see that $K_n\to 0$ so $u=0$. Hence $J_n\to 0$. But, since $I_{0n}\geqq(1-h)$, we have a contradiction. Thus for $\lambda=\lambda_0$, $(T_0+T_1+\lambda_0 T_2)$ has a bounded inverse W, say. Then (4.11) is equivalent to

$$u+(\lambda-\lambda_0)\,U(u)=W(w), \qquad U=W\,T_2$$

where U is completely continuous. The results follow.

THEOREM 4.2. *There is an $a_0>0$, depending only on h, p, $\|b\|^0_{2p}+\|c\|^0_{2p}$, and $\|d\|^0_p$ such that if $0<a\leqq a_0$ and the coefficients satisfy our general conditions on $B(x_0,a)$, then*

$$I[u,u;B(x_0,a)]\geqq\frac{(1-h)}{2}\,D[u,B(x_0,a)]=\frac{(1-h)}{2}\left(\|u\|^1_{2,0}\right)^2$$

for every $u\in H^1_{2,0}$ on $B(x_0,a)$.

Proof. For

$$I[u,u;B(x_0,a)]=I_0[u,u;B(x_0,a)]+\int_{B(x_0,a)}[(b^\alpha+c^\alpha)\,u\,u_{,\alpha}+d\,u^2]\,dx.$$

Since

$$\left|\int_{B(x_0,a)}(b^\alpha+c^\alpha)\,u\,u_{,\alpha}\,dx\right|\leq\|u\|^1_{2,0}\left\{\int_{B(x_0,a)}|b(x)+c(x)|^2\cdot|u(x)|^2\,dx\right\}^{\frac12}$$

and $|b+c|^2\in L_p$, the result follows from Lemma 4.4.

THEOREM 4.3. *If $0<a\leqq a_0$, $a^{\alpha\beta}$, b^α, c^α, and d satisfy the general conditions on $B(x_0,a)$, $e\in L_2$ there, and f satisfies the first condition of Lemma 4.5 then there exists a unique solution u of (1.1) in $H^1_{2,0}$ on $B(x_0,a)$. Moreover*

$$d[u,B(x_0,a)]\leqq 2(1-h)^{-1}\left[\|e\|^0_2+C(\nu,\mu)\,\|f\|^0_q\right]. \tag{4.13}$$

A corresponding result holds if f satisfies the condition of Theorem 3.1.

Proof. The proof parallels that of Theorems 3.2 and 4.1 since Theorem 4.2 holds.

THEOREM 4.4. *Suppose $u\in L_2$ on $B(x_0,a)$ where $0<a\leqq a_0$ and the coefficients satisfy the conditions of Theorem 4.3 on $B(x_0,a)$. Suppose also that $u\in H^1_2$ and satisfies (1.1) on each $B(x_0,R)$ with $0<R<a$. Then*

$$d[u,B(x_0,r)]\leqq C_3(h)\left\{\|e\|^0_2+C(\nu,\mu)\,\|f\|^0_q+(a-r)^{-1}\|u\|^0_2\right\}, \quad 0\leqq r<a. \tag{4.14}$$

A corresponding result holds if f satisfies the condition of Theorem 3.1.

Proof. Let $h(s)$ be a fixed function of class C' with $h(s)=1$ for $s\leqq 0$, $h(s)=0$ for $s\geqq 1$, and $h'(s)\leqq 0$. Choose R so $r<R<a$ and define

$$\zeta(x)=h[(|x-x_0|-r)/(R-r)], \qquad v=\zeta^2 u,\ U=\zeta u.$$

Then v and $U \in H^1_{2,0}$ on $B(x_0, R)$. Substituting in (1.1), we obtain

$$
(4.15)\quad \left\{\begin{aligned}
&0 = I[U, U; B(x_0, R)] + \int_{B(x_0,R)} [\zeta e^{\alpha} U_{,\alpha} + \zeta U f + U(b^{\alpha} - c^{\alpha})\zeta_{,\alpha} u + \\
&+ \zeta e^{\alpha}\zeta_{,\alpha} u - a^{\alpha\beta}\zeta_{,\alpha}\zeta_{,\beta} u^2]\, dx \geqq \frac{(1-h)}{2}\left(\|U\|^1_{2,0}\right)^2 - \\
&- \|U\|^1_{2,0}\left[\|e\| + C(\mu, \nu) L R^{\tau-1+2\mu} + C h_1 (R-r)^{-1} \|b-c\|^0_{2p} \cdot R^{\lambda} \|u\|^0_2\right] - \\
&- h_1 (R-r)^{-1} \|e\|^0_2 \|u\|^0_2 - (1+h)(R-r)^{-2} h_1^2 \left(\|u\|^0_2\right)^{2*}).
\end{aligned}\right.
$$

The result follows.

We now define the spaces S_λ and $S_{\lambda 0}$ for $0 < \lambda < 1$ as follows: $u \in S_\lambda$ on $B(x_0, a)$ if and only if $u \in H^1_2$ there and there is an L such that

$$
(4.16)\qquad d[u, B(x_1, r)] \leqq L(r/\delta)^{\tau-1+\lambda}, \qquad 0 \leqq r \leqq \delta = a - |x_1 - x_0|
$$

for every x in $B(x_0, a)$; if $u \in S_\lambda$ we define $|||u|||_\lambda$ as the larger of $'\|u\|^1_2$ (see (4.1)) and the smallest L which satisfies (4.16)). The space $S_{\lambda 0}$ is the subspace of S_λ for which $u \in H^1_{2,0}$ and $|||u|||_{\lambda,0}$ is the larger of $\|u\|^1_{2,0}$ and the smallest L as above.

LEMMA 4.6. *Suppose the b^{α}, c^{α} and d satisfy our general conditions and suppose $u \in S_\lambda$ on $B(x_0, a)$. Then $c^{\alpha} u_{,\alpha} \in L_r$, $du \in L_r$, and $b^{\alpha} u \in L_2$ on $B(x_0, a)$, where*

$$
r = \frac{2p}{p+1} > q \quad \text{and} \quad r' = \frac{2\nu p}{p\nu - 2p + 2} > q, \qquad \mu = 1 - \frac{\nu}{2p}
$$

and

$$
(4.17)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_{B(x_1,\varrho)} |b(x)|^2 |u(x)|^2\, dx \leqq \left(C(\nu, \lambda)\, |||u|||_\lambda \cdot \|b\|^0_{2p}\right)^2 \delta^{2\mu} (\varrho/\delta)^{\nu-2+2\mu} \\
&\int_{B(x_1,\varrho)} |c^{\alpha}(x)\, u_{,\alpha}(x)|\, dx \leqq C(\nu)\, |||u|||_\lambda \cdot \|c\|^0_{2p}\, \delta^{\tau-1+\mu} (\varrho/\delta)^{\nu-2+\lambda+\mu} \\
&\int_{B(x_1,\varrho)} |d(x)\, u(x)|\, dx \leqq C(\nu, \lambda) \cdot |||u|||_\lambda \cdot \|d\|^0_{\rho}\, \delta^{\tau-1+2\mu} (\varrho/\delta)^{\nu-2+2\mu}, \quad 0 \leqq \varrho \leqq \delta
\end{aligned}\right.
$$

for each $x_1 \in B(x_0, a)$, where $\delta = a - |x_1 - x_0|$.

Proof. The first results follow from Lemma 4.3 and the Hölder inequality. From Theorem 2.2 and the definition of $|||u|||_\lambda$, we see that

$$
|u(x) - u(x_1)| \leqq C(\nu, \lambda)\, |||u|||_\lambda\, \delta^{1-\tau-\lambda}\, |x - x_1|^{\lambda}, \qquad 0 \leqq |x - x_1| \leqq \delta/2
$$

$$
\int_{B(x_1,\delta)} |u(x)|^2\, dx \leqq \delta^2 \cdot |||u|||^2_\lambda.
$$

From these facts, it is easy to conclude that

$$
|u(x)| \leqq C(\nu, \lambda)\, |||u|||_\lambda \cdot \delta^{1-\tau} \qquad \text{for } 0 \leqq |x - x_1| \leqq \delta/2.
$$

The results (4.17) follow easily from this and the Hölder inequality.

DEFINITION. For u in $H^1_{2,0}$ or in any $S_{\lambda,0}$, we define the linear operator T by: $Tu = U$ where U is the solution in $H^1_{2,0}$ of

$$
\int_{B(x_0,a)} [v_{,\alpha}(a^{\alpha\beta} U_{,\beta} + b^{\alpha} u) + v(c^{\alpha} u_{,\alpha} + du)]\, dx.
$$

*) If we did not assume $a^{\beta\alpha} = a^{\alpha\beta}$, the integral would contain also the terms $(a^{\alpha\beta} - a^{\beta\alpha})\zeta_{,\alpha} u U_{,\beta}$ and the bracket multiplied by $\|U\|^1_{2,0}$ would have another term $C h_1 (R-r)^{-1} \|u\|^0_2$.

THEOREM 4.5. *There is a number a_1 with $0<a_1\leqq a_0$ which depends only on h, ν, p, λ, and the norms of b, c, and d such that if $0<a\leqq a_1$, and $0<\lambda\leqq\mu$, $Tu\in S_{0\lambda}$ and $\|T\|\leqq\frac{1}{2}$.*

This follows immediately from the preceding lemma and from Theorems 3.1 and 3.3. Accordingly we have the following Theorem:

THEOREM 4.6. *If $0<a\leqq a_1$ and if e satisfies (3.19) and f satisfies all the conditions of Lemma 4.5 with $0<\lambda\leqq\mu$ and $\lambda<\lambda_0$, then the solution of (1.1) which is in $H^1_{2,0}$ is also in $S_{\lambda 0}$ and*

$$|||u|||^1_{\lambda,0}\leqq C(\nu, p, \lambda)\, L.$$

A corresponding result holds if f satisfies (3.8) with $\lambda\leqq\mu$ and $\lambda<\lambda_0$.

Finally, we have the following final result on interior continuity:

THEOREM 4.7. *Suppose $u\in L_2$ on G and $u\in H^1_2$ on any domain D with $\bar{D}$ compact and $\bar{D}\subset G$. Suppose also that u satisfies (1.1) on each such domain where e and f satisfy the conditions of Theorem 4.5 for each $B(x_0, r)\subset G$ with $\lambda\leqq\mu$ and $\lambda<\lambda_0$. Then $u\in S_\mu$ on each sphere interior to G, where its norm depends only on L, h, μ, λ, p, the norms of b, c, d, and the distance of $\overline{B(x_0, a)}$ from ∂G, provided $a\leqq a_1$. Thus u satisfies a uniform Hölder condition on each such domain D which depends on D and the quantities above.*

Proof. Choose $\overline{B(x_0, a_1)}\subset G$. Then $u\in H^1_2$ on $B(x_0, a_1)$ and, in fact, its norm $'||u||^1_2$, as defined in (3.1), is bounded as indicated in Theorem 4.3. Then, let H be the a-harmonic function coinciding with u on $\partial B(x_0, a_1)$ and define U by

$$u = U + H.$$

Then $U\in H^1_{2,0}$ on $B(x_0, a_1)$ and satisfies (1.1) with e^α and f replaced by E^α and F, respectively, where

$$E^\alpha = e^\alpha + b^\alpha H, \quad F = f + c^\alpha H_{,\alpha} + dH.$$

But now $H\in S_{\lambda_0}$ on $B(x_0, a_1)$ with

$$|||H|||_{\lambda_0}\leqq C(\nu, h)\,'||u||^1_2$$

by Theorem 2.1, since $I_0(u, u; B) = I_0(U, U; B) + I_0(H, H; B)$ $\big(B = B(x_0, a_1)\big)$. But then it follows from Lemma 4.6 that E and F satisfy the conditions of Theorem 4.6, where L now involves $'||u||^1_2$ linearly. The results follow from Theorems 4.6 and 2.2.

5. *Hölder continuity at the boundary.* In this section, we prove our results about Hölder continuity at the boundary. We begin by defining domains of class $S^*(\alpha, a)$.

DEFINITION. A domain G is of class $S^*(\alpha, a)$, $0<\alpha<1$, if and only if it is bounded and

$$|B(x_0, r) - G|\geqq\alpha|B(x_0, r)|, \qquad \text{for all } r \text{ with } 0<r\leqq a$$

and any x_0 not in G.

We begin by generalizing some of DE GIORGI's lemmas and theorems.

DEFINITION. A function $u \in \mathfrak{B}^*(E, \gamma)$ iff $u \in L_2$ on E, $u \in H_2^1$ on domains D with $\overline{D}$ compact and $\overline{D} \subset E$, and if

$$(5.1)\quad \begin{cases} \int\limits_{A(k,\varrho_1)} |\nabla u|^2\, dx \leqq \dfrac{\gamma}{(\varrho_2-\varrho_1)^2} \int\limits_{A(k,\varrho_2)} |u(x)-k|^2\, dx & \text{for all } k \geqq 0, \\ \int\limits_{B(k,\varrho_1)} |\nabla u|^2\, dx \leqq \dfrac{\gamma}{(\varrho_2-\varrho_1)^2} \int\limits_{B(k,\varrho_2)} |u(x)-k|^2\, dx & \text{for all } k \leqq 0, \end{cases}$$

the notations being those of § 2.

It is easy to see that DE GIORGI's Lemma I holds for such functions and (by repeating his proof) that his Lemma IV holds, provided $k \geqq 0$ and a corresponding result holds for the sets $B(k, \varrho)$ for $k \leqq 0$; we label these results as Lemmas I* and IV*. As in DE GIORGI's case, these lemmas imply that any function $u \in \mathfrak{B}^*(E, \gamma)$ is bounded on compact subsets of E. We now prove a lemma which permits us to generalize DE GIORGI's Lemmas II and III slightly:

LEMMA 5.1. *Suppose $u \in H_p^1$ on $B(x_0, \rho)$, suppose u vanishes on a subset B with $|B| \geqq \alpha |B(\varrho)|$ $\big(B(\varrho) = B(x_0, \varrho)\big)$, $0 < \alpha < 1$. Then*

$$(5.2)\quad \int\limits_e |u(x)|^p\, dx \leqq \beta_p(\nu, \alpha) \cdot |G|^{(p-1)/p} |e|^{1/p} \int\limits_{B(\varrho)} |\nabla u|^p\, dx \qquad \big(G = B(\varrho) - B\big).$$

Proof. It is known ([7] or [9]) that u is equivalent to a function which is absolutely continuous along almost all lines in any direction and continues to have this property in any coordinate system related to the original by a bi-Lipschitz transformation. So we assume u to have this property already. It is easy to show that if x_0 is not in a set Z of measure zero [for instance if $u(x_0)$ is the Lebesgue derivative of $\int\limits_e u(x)\, dx$ at x_0 and if the Lebesgue derivatives of $\int\limits_e u_{,\alpha}(x)\, dx$ all exist at x_0] then u is absolutely continuous for $r \geqq 0$ along almost all radial lines through x_0.

Suppose $0 < \varepsilon < \alpha$ and $\eta = \varepsilon |B(\varrho)|$. We may cover G with an open set $G' \subset B(\varrho)$ such that $|G'| < |B(\varrho)| - |B| + \eta$. Let $B' = B(\varrho) - G'$; then $|B'| > (\alpha - \varepsilon) \cdot |B(\varrho)|$. For each x in G', let $\Sigma(x)$ be the set of points ζ on $\partial B(0, 1)$ such that $x + r\zeta \in B'$ for at least one r; clearly $\Sigma(x)$ is the union of a countable family of closed sets and so is measurable. It is geometrically evident that

$$(5.3)\qquad |\Sigma(x)| \geqq [C(\alpha - \varepsilon, \nu)]^{-1} \Gamma_\nu, \qquad C > 0$$

since $|\Sigma(x)|$ would be smallest if B' were a cone with vertex at x and axis along a diameter of $B(\varrho)$.

For each x in G' and ζ in $\Sigma(x)$, let $r(x, \zeta)$ be the smallest value of r such that $x + r\zeta \in B'$ and let $G(x)$ denote the set of all $\xi = x + r\zeta$ for $0 \leqq r < r(x, \zeta)$. If $x \in G' - Z$ and if ζ does not belong to a set of measure zero, we have $u(x + r\zeta)$ absolutely continuous in r for $0 \leqq r \leqq r(x, \zeta)$, so that

$$(5.4)\qquad u(x) = -\int\limits_0^{r(x,\zeta)} u_r(x + r\zeta)\, dr \qquad (u_r = \zeta^\alpha u_{,\alpha}),\ \zeta \in \Sigma(x).$$

Averaging over $\Sigma(x)$, we obtain

$$u(x) = -|\Sigma(x)|^{-1} \int_{G(x)} |\xi - x|^{-\nu} (\xi^\alpha - x^\alpha) u_{,\alpha}(\xi)\, d\xi. \tag{5.5}$$

From (5.3) and (5.5), it follows that

$$|u(x)| \leqq C \Gamma_\nu^{-1} \int_{G'} |\xi - x|^{1-\nu} |\nabla u(\xi)|\, d\xi, \qquad x \in G' - Z. \tag{5.6}$$

Since ε is arbitrary (5.6) holds with $C = C(\alpha, \nu)$ and G' replaced by G. If $p > 1$, we may use the Hölder inequality to obtain

$$\begin{cases} |u(x)|^p \leqq C^p \Gamma_\nu^{-p} \left[\int_G |\xi - x|^{(1-\nu)\frac{p}{p-1}} d\xi \right]^{p-1} \cdot \int_G |\xi - x|^{1-\nu} \cdot |\nabla u(\xi)|^p d\xi \\ \qquad \leqq C |G|^{(p-1)/\nu} \gamma_\nu^{-(p-1)/\nu} \Gamma_\nu^{-1} \int_G |\xi - x|^{1-\nu} \cdot |\nabla u(\xi)|^p d\xi, \qquad x \in G - Z. \end{cases} \tag{5.7}$$

If $p = 1$, (5.7) coincides with (5.6) (as modified). The result follows by integrating over e.

We now state and prove our slight generalizations of De Giorgi's Lemmas II and III:

Lemma II*. *If $u \in H_p^1$ with $p \geqq 1$ on $B(\varrho) = B(x_0, \varrho)$, $k < \lambda$, and*

$$|B(\varrho) - A(k, \varrho)| \geqq \alpha |B(\varrho)|, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

then

$$(\lambda - k) |A(\lambda; \varrho)|^{(\nu-1)/\nu} \leqq \beta_1(\nu, \alpha) \int_{A(k,\varrho) - A(\lambda,\varrho)} |\nabla u|\, dx.$$

Proof. This follows immediately from Lemma 5.1 by taking $p = 1$ and $e = A(\lambda; \varrho)$ and replacing u by the function $w(x) = 0$ when $u(x) \leqq k$, $w(x) = u(x) - k$ for x on $A(k; \varrho) - A(\lambda; \varrho)$, and $w(x) = (\lambda - k)$ on $A(\lambda; \varrho)$.

Lemma III*. *If $u \in H_2^1$ on $B(\varrho)$ and if*

$$|B(\varrho) - A(k; \varrho)| \geqq \alpha |B(\varrho)|, \qquad \alpha > 0$$

then

$$\int_{A(k;\varrho)} |u(x) - k|^2 dx \leqq \beta_2(\nu, \alpha) |A(k; \varrho)|^{2/\nu} \int_{A(k;\varrho)} |\nabla u|^2 dx.$$

Proof. This follows from Lemma 5.1 by setting $p = 2$ and $e = A(k; \varrho) = G$ and replacing u by w where $w(x) = 0$ if $u(x) \leqq k$ and $w(x) = u(x) - k$ if $u(x) > k$.

By repeating De Giorgi's proof of his Lemma V, using the modified lemmas above, we obtain the following lemma:

Lemma V*. *Suppose $u \in \mathfrak{B}^*(E, \gamma)$. Then there is a number $\eta(\nu, \gamma, \alpha) > 0$ such that if $B(x_1, 4\varrho) \subset E$, $\mu > 0$, $\omega > 0$, $\mu - 2\omega \geqq 0$, $u(x) \leqq \mu$ on $B(x_1, 4\varrho)$, and $|A(\mu - 2\omega; 2\varrho)| \leqq (1 - \alpha) |B(x_1; 2\varrho)|$, then $u(x) \leqq \mu - \eta\omega$ on $B(x_1; \varrho)$.*

Remark. Results corresponding to the lemmas above hold if u is replaced by $-u$.

We now prove an analog of De Giorgi's Theorem II and extend our Theorem 2.1; Theorem II* has been proved by Nash in [*11*].

THEOREM II*. *Suppose the part $B(x_0, a)\cap G$ of the domain G is of type $S^*(\alpha, a)$, suppose $u\in L_2$ on $B(x_0, a)$ and $u\in H_2^1$ on each $B(x_0, R)$ with $0<R<a$, suppose u is a-harmonic on $G\cap B(x_0, a)$, and suppose $u(x)=0$ for $x\in B(x_0, a)-G$. Then u satisfies a uniform Hölder condition with exponent $\lambda_0^*(h, \nu, \alpha)$ on each $B(x_0, R)$ with $0<R<a$ which depends only on $h, \nu, \alpha, a-R$, and $\|u\|_2^0$ and $\|u\|_2^1$ is finite on each such $B(x_0, R)$.*

THEOREM 5.1. *If G and u satisfy the hypotheses of Theorem* II* *and if $u\in H_2^1$ on $B(x_0, a)$, then*

$$d[u, B(x_1, r)]\leqq C(\nu, h, \alpha)\, d[u, B(x_1, \delta)]\cdot (r/\delta)^{\tau-1+\lambda_0^*},\quad 0\leqq r\leqq \delta = a-|x_1-x_0|$$

for any $x_1\in B(x_0, a)$.

Proofs. Suppose, first, that $x_1\in B(x_0, a)-G$. Let $h(r)$ be an arbitrary function of class C' for $0\leqq r\leqq\delta$ with $h(r)=0$ near $r=\delta$. Let v be any function $\in H_2^1$ on $B(x_1, \delta)$ which is the strong limit in H_2^1 of functions of class C' on $\overline{B(x_1, \delta)}$ which vanish on $\overline{B(x_1, \delta)}-G$ and define

$$V(x)=h(|x-x_1|)\cdot v(x).$$

Then $V\in H_{2,0}^1$ on $B(x_1, \delta)$ and on $B(x_1, \delta)\cap G$ and V vanishes on $B(x_1, \delta)-G$ so that

$$\int_{B(x_1,\delta)} V_{,\alpha}a^{\alpha\beta}u_{,\beta}\,dx=\int_{B(x_1,\delta)\cap G} V_{,\alpha}a^{\alpha\beta}u_{,\beta}\,dx=0$$

$$=\int_0^R\left\{h(r)\int_{\partial B(x_1,r)} v_{,\alpha}a^{\alpha\beta}u_{,\beta}\,dS+h'(r)\int_{\partial B(x_1,r)} v\,a^{\alpha\beta}n_{,\alpha}u_{,\beta}\,dS\right\}dr$$

$$=\int_0^R h'(r)\left\{\int_{\partial B(x_1,r)} v\,a^{\alpha\beta}n_{,\alpha}u_{,\beta}\,dS-\int_{B(x_1,r)} v_{,\alpha}a^{\alpha\beta}u_{,\beta}\,dx\right\}dr$$

since u is a-harmonic on $B(x_1, \delta)\cap G$. Since this is true for any $h(r)$ as stated we see that

$$\int_{B(x_1,r)} v_{,\alpha}a^{\alpha\beta}u_{,\beta}\,dx=\int_{\partial B(x_1,r)} v\,a^{\alpha\beta}n_{\alpha}u_{,\beta}\,dS,\qquad 0\leqq r\leqq R,\ r\notin Z. \tag{5.8}$$

If we apply (5.8) with $v=\operatorname{pos}(u-k)$ where $k\geqq 0$, we see that (5.8) holds with u replaced by v. By following the procedure in the proof of the Leray-Cacciopoli lemma ([5], p. 153) we see that

$$\int_{A(k;\varrho_1)}|Vu|^2\,dx\leqq\frac{\gamma'}{(\varrho_2-\varrho_1)^2}\int_{A(k;\varrho_2)}|u(x)-k|^2\,dx,$$

where

$$0<\varrho_1<\varrho_2\leqq\delta,\qquad k\geqq 0,\qquad A(k;\varrho)=A(k)\cap B(x_1;\varrho)$$

where the γ here is the same as in Theorem II. A similar result holds for the sets $B(k;\varrho)$. Accordingly $u\in\mathfrak{B}^*(E, \gamma)$ on $B(x_1, \delta)$.

Moreover, since $|B(x_1, r)-G|\geqq\alpha|B(x_1, r)|$ for $0\leqq r\leqq\delta$, we see immediately from Lemma V* that u satisfies a Hölder condition with exponent $\lambda_0^*(\nu, \alpha, h)$ and constant depending only on those numbers, $\|u\|_2^0$, and δ with

$u(x_1)=0$. Now, from our previous results each point x_1 in $B(x_0, a)\cap G$ is also the center of a sphere $B(x_1, 5\varrho/2)$ in which

$$|u(x)-u(x_1)|\leqq K(x_1)\cdot|x-x_1|^{\lambda_0}\leqq K^*(x_1)\cdot|x-x_1|^{\lambda_0^*},\qquad x\in B(x_1, 5\varrho/2).$$

If $0<R<a$, $\overline{B(x_0, R)}$ can be covered by a finite number of the spheres $B(x_1, \varrho)$ $(\subset B(x_1, 5\varrho/2))$. Thus u satisfies a Hölder condition of exponent λ_0^* on $B(x_0, R)$. The homogeneity argument in the proof of Theorem 2.1 may be repeated after which Theorem 5.1 follows as before.

We can now sketch how to prove the results concerning the boundary behavior of the solutions of equations (1.1) which were stated in the introduction for domains G of type $S^*(\alpha, a)$: We first consider solutions u in $H^1_{2,0}$ on G of equations (3.1) where we assume that e and f satisfy

$$(5.9)\qquad \begin{cases} \int\limits_{B(x_0, r)\cap G}|e|^2\,dx\leqq L^2(r/a)^{\nu-2+2\lambda}, & 0\leqq r\leqq a,\\ \int\limits_{B(x_0, r)\cap G}|f|\,dx\leqq K\,L\,a^{1-\tau}(r/a)^{\nu-2+\lambda} & \text{for all } r, \end{cases}\qquad 0<\lambda<\lambda_0, \mu$$

for any x_0; the restriction on f guarantees that the gradient of the potential of f restricted to $B(x_0, a)$ satisfies a condition like that for e. First, we notice that if u is such a solution and we subtract off the function H_0 which is a-harmonic on $G\cap B(x_0, a)$ and coincides on $\partial[G\cap B(x_0, a)]$ with u and vanishes on $B(x_0, a)-G$, then $u_1=u-H_0$ vanishes on $\partial B(x_0, a)$ and is a solution of (3.1) with the same e and f. Then the argument of Theorem 3.3 can be repeated to obtain the result of that theorem for u_1, the only difference being that when one writes $u_1=U+H$ on $B(x_0, R)$, the function H is that function which is a-harmonic on $G\cap B(x_0, R)$ and coincides with u_1 on $\partial[G\cap B(x_0, R)]$ and is 0 on $B(x_0, R)-G$ as are u, u_1, and U; the argument works on account of Theorems II* and 5.1.

It is now clear that the relevant arguments of section 4 will go through for spheres $B(x_0, a)$ if we restrict ourselves throughout to the space ${}^*H^1_2$ consisting of all $u\in H^1_2$ on $\overline{B(x_0, a)}$ which are limits in H^1_2 of functions of class C' which vanish in a neighborhood of $[\overline{B(x_0, a)}-G]$ and define ${}^*H^1_{2,0}={}^*H^1_{2,0}\cap H^1_{2,0}$ and ${}^*S_\lambda={}^*H^2_1\cap S_\lambda$, etc.

In case G is a Lipschitz domain, i.e. one such that each boundary point is in a neighborhood N on $G\cup\partial G$ which can be mapped in a bi-Lipschitz way on a hemisphere in such a way that $N\cap\partial G$ corresponds to the flat boundary, and if e and f satisfy (5.9) and the coefficients satisfy our general conditions, we see that any solution u of (1.1) satisfies a uniform Hölder condition on $\overline{G}$ as follows: Let x_0 be any point of ∂G and let T be a bi-Lipschitz map as above. Then the transform of u satisfies an equation of the same form on the hemisphere but, of course, the norms of the new b^α, c^β, d, e, and f will be different and the new $a^{\alpha\beta}$ will satisfy (2.3) with a different h. But now $u=0$ along the flat boundary. If we extend u by reflection (as we would a harmonic function) and extend the coefficients and the e^α and f properly, the extended u will satisfy the extended equations on the full sphere and our results follow from our previous results for the interior.

Bibliography

[1] CALDERON, A. P., and A. ZYGMUND: On singular integrals. Amer. J. Math. **78** 289—309 (1956). — [2] GIORGI, E. DE: Sull'analyticita delle estremali degli integral multipli. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8), **20**, 438—441 (1956). — [3] GIORGI, E. DE: Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integral multipli regolari. Mem. Accad. Sci. Torino, s. 3a, **3**, Parte I 25—43 (1957). — [4] HEINZ, E. Über die Eindeutigkeit beim Cauchyschen Anfangswertproblem einer elliptischen Dif ferentialgleichung zweiter Ordnung. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. IIa No. 1, 1—12 (1955). — [5] MIRANDA, C.: Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico Berlin: Springer 1955. — [6] MORREY jr., C. B.: On the solutions of quasilinear ellipti partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 126—166 (1938). — [7] MOR REY jr., C. B.: Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics Univ. Calif. Publ. Math., New Ser. **1**, 1—130 (1943). — [8] MORREY jr., C. B.: Second order elliptic systems of differential equations. Ann. of Math. Studies No. 33, pp. 101—159 Princeton Univ. Press 1954. — [9] MORREY jr., C. B., and JAMES EELLS jr.: A variational method in the theory of harmonic integrals I. Ann. of Math. **63**, 91—128 (1956). — [10] NASH, J.: Parabolic equations. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **43**, 754—758 (1957). — [11] NASH, J.: Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. Amer. J. Math **80**, 931—954 (1958). — [12] PLESSIS, N. DU: Some theorems about the Riesz fractional integral. Trans. Amer. Math. Soc. **80**, 124—134 (1955). — [13] STAMPACCHIA, G.: Contributi alla regolarizzazione delle soluzioni dei problemi al contorno per equazioni del secondo ordine ellittiche. Ann. Scuo. Norm. Pisa, Ser. 3, **12**, 223—245 (1958).

Dept. of Math., University of California, Berkeley, Cal. (U.S.A.)

(Eingegangen am 23. März 1959)

Gilbarg, D.
Math. Zeitschr. 72, 165—174 (1959)

Some Hydrodynamic Applications of Function Theoretic Properties of Elliptic Equations

In memoriam Leon Lichtenstein

By
D. Gilbarg

Research on the function theoretic properties of elliptic differential equations (e.g., quasi-conformal mapping, pseudo-analytic functions, the maximum principle) has paralleled and often been motivated by developments in fluid dynamics. The success of these methods in applications has been apparent in the theory of subsonic flows, and an excellent survey of this subject is contained in the monograph of Bers [3]. The present note, in the same spirit, is concerned with several properties of quasi-conformal mappings and first order elliptic systems, and then with their application to a comparison theorem for subsonic flows and the asymptotic behavior of subsonic flows with free boundaries. The effect of these results is that much of the qualitative theory of free streamlines now carries over without essential change to subsonic flows of a compressible fluid. This extends previous work by the author [10] which was based on different methods.

Lemmas on quasi-conformal mappings and elliptic equations

We consider in this section several preliminary results on quasi-conformal mappings and first order elliptic systems in two independent variables. These will be needed in application but also appear to be of intrinsic interest.

In the following a continuous complex-valued function $w(z)=u+iv$ will be said to define a K quasi-conformal mapping in a region D of the z-plane if (i) it is absolutely continuous in x for almost all y and in y for almost all x, (ii) the derivatives u_x, u_x, v_y, v_y are locally square integrable, and (iii) the derivatives satisfy almost everywhere the inequality

$$u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2\leqq 2K(z)\,(u_x v_y-u_y v_x) \tag{1}$$

or equivalently,

$$|w_{\bar z}|\leqq\sqrt{\frac{K-1}{K+1}}\,|w_z|\,, \tag{2}$$

where $K(z)\geqq 1$ is a bounded function in D. Here

$$w_z=\tfrac{1}{2}\,(w_x-i\,w_y)\,,\qquad w_{\bar z}=\tfrac{1}{2}(w_x+i\,w_y)\,.$$

This work was supported by the Office of Naval Research, Stanford University, Contract No. Nonr-225 (11).

For one-to-one mappings this analytic statement is equivalent to the geometric condition that the dilatation

$$\mu(z) = \overline{\lim_{r \to 0}} \frac{\max_{z'-z=r} |w(z') - w(z)}{\min_{z'-z=r} |w(z') - w(z)|}$$

is bounded by $K + \sqrt{K^2 - 1}$. This is evident for C^1 mappings but is true more generally.

Of particular interest here will be the quasi-conformal mappings defined by solutions $w = u + iv$ of an elliptic system

$$v_y = a\,u_x + b u_y, \qquad -v_x = c\,u_x + d\,u_y. \tag{3}$$

or of the single equation

$$(a\,u_x + b\,u_y)_x + (c\,u_x + d\,u_y)_y = 0 \tag{3'}$$

where a, b, c, d are bounded and

$$4\,a\,d - (b+c)^2 \geqq \delta > 0.$$

A simple algebraic computation verifies that any solution $w(z)$ satisfies an inequality of the form (1). Conversely, any quasi-conformal mapping $w(z)$ is the solution of a Beltrami equation

$$w_{\bar{z}} = \nu(z)\, w_z, \qquad |\nu| = \sqrt{\frac{K-1}{K+1}} \leqq \nu_0 < 1, \tag{4}$$

with a bounded measurable coefficient $\nu(z)$ (we set $\nu = 0$ wherever w_z is undefined or equals zero); (4) is the complex form of a system (3) with coefficients $a = \alpha$, $b = c = \beta$, $d = \gamma$, satisfying $\alpha\gamma - \beta^2 = 1$.

We note that (1) and (2) are invariant under conformal mapping. An important connection between quasi-conformal mapping and function theory is provided by the Morrey representation theorem [*4*], [*13*]. This asserts that any K quasi-conformal mapping $w(z)$ can be represented in the form

$$w(z) = f(\zeta(z)) \tag{5}$$

where f is complex analytic and $\zeta(z)$ is a K quasi-conformal homeomorphism. Plainly $\zeta(z)$ is arbitrary within a conformal mapping.

The following Phragmén-Lindelöf theorem for quasi-conformal mappings has been stated by PFLUGER [*14*].

LEMMA 1. *Let $w = u + iv$ be K quasi-conformal in a simply connected region G whose boundary G extends to infinity, and let $M(r)$ denote the maximum of u on the intersection C_r of G with the circle $|z| = r$. Denote by $\lambda(r)$ the length of C_r. Then, if $u \leqq 0$ on the boundary of G, either $u \leqq 0$ throughout G, or there is a positive constant A for which*

$$M(r) \geqq A \exp\left(\pi \int_{r_0}^{r} \frac{d\varrho}{\lambda(\varrho)\,\mu(\varrho)}\right), \qquad r > r_0, \tag{6}$$

where $\mu(\varrho) = \max_{|z|=\varrho} \left(K(z) + \sqrt{K^2(z) - 1}\right)$.

In particular, if G is contained in a half-plane, so that $\lambda(r) \leqq \pi r$, and if $K \to 1$ at infinity in such a way that

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\mu(\varrho) - 1}{\varrho} \, d\varrho < \infty, \tag{7}$$

then (6) becomes

$$M(r) \geqq A r. \tag{8}$$

In PFLUGER's statement of this theorem in [14], K is a constant, but his method also yields the above result for variable K.

LEMMA 2. *(Boundary point lemma.) Let $w(z) = u + iv$ be K quasi-conformal in a region G of the upper half z-plane abutting a segment S of the real axis containing the origin 0. Suppose that $u > 0$ in G and that $u(0) = 0$. If, in addition,*

$$\int_0^{r_0} \frac{\mu(\varrho) - 1}{\varrho} \, d\varrho < \infty, \qquad \mu(\varrho) = \max_{|z| \leq \varrho} \left(K(z) + \sqrt{K^2(z) - 1} \right), \tag{9}$$

then the normal derivative at 0 is positive:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0) > 0; \tag{10}$$

if the derivative does not exist, the same inequality holds for the lower derivative.

It is clear by conformal mapping that the lemma remains true if the boundary segment S is replaced by a sufficiently smooth arc — for example, by an arc having a Hölder continuous tangent (see footnote 1).

The above lemma has been proved under more restrictive hypotheses by FINN and GILBARG ([6], pp. 31–35). The following proof is essentially different and conceptually simpler. The corresponding result for general elliptic equations of non-divergence structure has been proved by E. HOPF [12].

PROOF OF LEMMA 2. By the general representation theorem (5), there is a K quasi-conformal homeomorphism $\zeta(z) = \xi + i\eta$ of G onto a domain G_ζ, and an analytic function $f(\zeta)$ such that $w(z) = f(\zeta(z))$. We may assume that $\zeta(z)$ is such that the boundary segment S is taken into a segment S_ζ of the real axis in the ζ-plane and that $\zeta(0) = 0$. The mapping $\zeta(z)$ can be extended by reflection across S to a quasi-conformal homeomorphism of a full neighborhood of $z = 0$ in which (9) is satisfied.

The harmonic function $u(\zeta) = \mathrm{Re} f(\zeta)$ is positive in G_ζ and $u(0) = 0$. Let A be an annulus in G_ζ whose outer boundary is tangent to S_ζ at $\zeta = 0$ and has radius a. We infer from the maximum principle that if ε is a sufficiently small positive number,

$$u(\zeta) - \varepsilon \log \frac{a}{\varrho} \geqq 0 \quad \text{in } A,$$

where ϱ is the radial distance of ζ from the center of A ($\varrho = |\zeta - ai|$). This exhibits the fact that $u(\zeta)/|\zeta|$ is bounded away from zero near $\zeta = 0$ in every angle $0 < \delta \leqq \arg \zeta \leqq \pi - \delta$.

Single angle distortion is bounded in a quasi-conformal mapping, we may suppose that $\zeta(z)$ takes a segment $x=0$, $0\leqq y\leqq y_0$, into an arc contained in the angle $0<\delta\leqq\arg\zeta\leqq\pi-\delta$. From the relation

$$\frac{u(0,y)}{y}=\frac{u(\zeta)}{|\zeta|}\frac{|\zeta|}{y}$$

it evidently suffices for the lemma to prove that $|\zeta(z)/z|\geqq m>0$. This is included in the following general result:

If $\zeta(z)$ is a one-to-one K quasi-conformal mapping of $|z|\leqq r_0$, with $\zeta(0)=0$ and if K satisfies (9), then there are constants m, M such that

$$0<m\leqq|\zeta(z)/z|\leqq M<\infty. \tag{11}$$

Stronger results, based on the geometric definition of quasi-conformality are contained in the work of TEICHMÜLLER [15], WITTICH [16], and BELINSKII [1]. In particular, the latter has shown that $\zeta(z)/z$ has a finite non-zero limit as $z\to 0$. The following is an elementary proof of (11) based on the analytic definition (1).

Let $D(r)$ denote the Dirichlet integral of ζ over the disc C_r: $|z|\leqq r$,

$$D(r)=\int_{C_r}(|\zeta_x|^2+|\zeta_y|^2)\,dx\,dy.$$

A simple argument of FINN and SERRIN ([7], p. 2) yields the inequality

$$D(r)\leqq\frac{r\mu(r)}{2}\frac{dD}{dr}$$

for any function $\zeta(z)$ satisfying (1). Integration gives

$$D(r)\leqq D(r_0)\exp\left[-2\int_r^{r_0}\frac{d\varrho}{\varrho\,\mu(\varrho)}\right]. \tag{12}$$

Let $\omega(r)=\max_{|z_1|,\,|z_2|=r}|\zeta(z_2)-\zeta(z_1)|$ be the oscillation of $\zeta(z)$ on $|z|=r$ and hence in the disc $|z|\leqq r$. By the well known device of LEBESGUE,

$$\frac{\omega^2(r)}{r}\leqq\frac{1}{r}\left(\int_{C_r}|\zeta_\vartheta|\,d\vartheta\right)^2\leqq\frac{2\pi}{r}\int_{C_r}\zeta_\vartheta^2\,d\vartheta\leqq 2\pi D'(r).$$

Integrating from r to $2r$, and noting the monotone character of $\omega(r)$, we obtain

$$\omega^2(r)\leqq\frac{2\pi}{\log 2}[D(2r)-D(r)]\leqq\frac{2\pi}{\log 2}D(2r).$$

From (12) and (9), and the inequality $|\zeta(z)|\leqq\omega(|z|)$, we get finally

$$|\zeta(z)/z|\leqq M<\infty.$$

The bound from below $0<m\leqq|\zeta(z)/z|$ is obtained in the same way after observing that the inverse mapping $\zeta(z)$ is quasi-conformal and that the dilatation $\mu(\zeta)$ continues to satisfy (9) (by virtue of the bound $|\zeta(z)|\leqq M|z|$). This completes the proof of (11) and hence of Lemma 2.

The preceding lemmas reveal an interesting contrast between the behavior of quasi-conformal mappings — or equivalently, solutions of elliptic equations of the form (3), (3′) — and of solutions of elliptic equations of non-divergence structure,

$$a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + d u_x + e u_y = 0. \tag{13}$$

We remark first that the results stated in the lemmas are essentially sharp, as is shown by the following examples.

In Lemma 1 if K is a constant >1 and G is a half plane, the conclusion states that $M(r) \geqq A r^{\alpha}$, where $\alpha = 1/\mu = K - \sqrt{K^2 - 1} < 1$. Precisely this behavior is achieved by the mapping $w = z|z|^{\alpha - 1}$, $\alpha > 0$, which has vanishing real part on $x = 0$, and is quasi-conformal in $x > 0$, since $|w_{\bar{z}}/w_z| = |(\alpha - 1)/(\alpha + 1)| < 1$. For this function $M(r) = r^{\alpha}$, which is $o(r)$ if $\alpha < 1$. If K is variable and $K \to 1$ at infinity but without a modulus of continuity satisfying (7), the conclusion $M(r) \geqq A r$ need not hold. Namely, consider the function

$$w = -2 + z \exp\left[-(\log|z|)^{1-\alpha}\right], \qquad 0 < \alpha < 1$$

in the half-plane $x \geqq 2$. $\mathrm{Re}\, w \leqq 0$ on $x = 2$, and w is quasi-conformal. Since

$$\left|\frac{w_{\bar{z}}}{w_z}\right| = \frac{|(1-\alpha)(\log|z|)^{-\alpha}|}{|2 + (1-\alpha)(\log|z|)^{-\alpha}|} \to 0 \quad \text{at} \quad \infty,$$

it is evident that $K \to 1$ at infinity, yet

$$M(r) = -2 + r \exp\left[-(\log r)^{1-\alpha}\right] = o(r).$$

This example shows the existence of an elliptic equation (3′) for which the coefficients a, b, c, d approach $1, 0, 0, 1$ at infinity but for which the conclusion of the Phragmén-Lindelöf theorem $M(r)/r \geqq \text{const.} > 0$, is not true. On the other hand, this conclusion is always valid for uniformly elliptic equations of the form $a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} = 0$ (a, b, c bounded, $ac - b^2 \geqq m > 0$) without any continuity limitations on the coefficients at infinity (cf. [8]).

In Lemma 2 the conclusion may be false if $K(0) \neq 1$ or if $K \to 1$ at 0 without a modulus of continuity satisfying (9). In the former case a simple counter-example is given by $w = z|z|^{\alpha}$, $\alpha = \text{const.} > 0$. Clearly $u = \mathrm{Re}\, w > 0$ for $x > 0$, $u = 0$ at $z = 0$, and $|w_{\bar{z}}/w_z| = |(\alpha - 1)/(\alpha + 1)| < 1$; however, $u_x(0) = 0$. An example of the latter case is given by the mapping

$$w = z \exp\left[(\log|z|)^{1-\alpha}\right], \qquad 0 < \alpha < 1,$$

for which

$$\left|\frac{w_{\bar{z}}}{w_z}\right| = \frac{|(1-\alpha)(\log|z|)^{-\alpha}|}{|2 + (1-\alpha)(\log|z|)^{-\alpha}|} \to 0 \quad \text{at} \quad z = 0,$$

yet $u_x(0) = 0$. This exhibits an equation of the form (3′) which approaches the Laplacian at $z = 0$ but for which the conclusion of the boundary point lemma is not valid. In contrast, the lemma is always true for solutions of uniformly elliptic equations of the form (13) whether or not the coefficients

are continuous (cf. [12]). (It suffices that near 0 the coefficients be bounded and that $ac - b^2 \geqq \delta > 0$.)

While equations of the form (13) yield stronger results than equations (3′) with regard to the Phragmén-Lindelöf theorem and the boundary point lemma, the reverse is true as regards some other properties connected with the maximum principle; see Theorem 7 in [11] for example.

Comparison theorem for subsonic flows

The preceding lemmas will now be used to derive a comparison theorem for subsonic flows past a wall. By a *flow past a wall* we shall mean a flow uniform at infinity in the positive x direction and bounded by a single streamline extending to $x = \pm\infty$. It is supposed that the streamline — or wall — has a Hölder continuous tangent at infinity[1]), and that the velocity vector is continuous up to and including the wall. Points where the curve has a Hölder continuous tangent will be called *regular*. We now prove

COMPARISON THEOREM. *Let two subsonic flows past the walls γ and $\bar{\gamma}$ be defined in regions D and $\bar{D}$. Suppose that $D \subset \bar{D}$ and that γ and $\bar{\gamma}$ have a regular point P in common. Then if the respective free stream velocities satisfy the inequality $q_0 \leqq \bar{q}_0$, the flow speeds at P are unequal in the same order,*

$$q(P) \leqq \bar{q}(P); \tag{14}$$

furthermore, $q(P) = \bar{q}(P)$ if and only if the flows are identical and $D = \bar{D}$.

Similar comparison theorems have been useful as a source of qualitative theorems in hydrodynamics, particularly in the theory of free surface flows; (for a review of the literature see [5] and [9]). The analogue of the above result for plane flows of an incompressible fluid was first proved by LAVRENTIEFF and was extended in various ways by J. SERRIN and the author. An extension to subsonic flows by the author [10] covered most cases of interest but was not directly applicable to flows with infinite cavities. The above form of the theorem is sufficient for this purpose and for the other natural generalizations from the incompressible case. However, the present result is still slightly more restrictive than the analogous theorem for incompressible fluids in that the latter makes no Hölder assumptions on the slope of the wall at infinity.

PROOF. The flows under consideration are each described by a potential φ and stream function ψ connected by the relations

$$\psi_y = \varrho\,\varphi_x, \qquad \psi_x = -\varrho\,\varphi_y, \qquad \varrho = \varrho(\varphi_x^2 + \varphi_y^2), \tag{15}$$

[1]) A curve C will be said to have a Hölder continuous tangent at a finite point $P \in C$ if the inclination $\vartheta(z)$ satisfies an inequality $|\vartheta(z_1) - \vartheta(z_2)| \leqq K|z_1 - z_2|^\alpha$ for constants K, α, $0 < \alpha < 1$, and for all $z_1, z_2 \in C$ in a neighborhood of P. If P is at infinity the inequality to be satisfied by $\vartheta(z)$ becomes $|\vartheta(z_1) - \vartheta(z_2)| \leqq K \left|\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right|^\alpha$ for all sufficiently large z_1, z_2 on C.

where the density ϱ is a given function of the speed $q=(\varphi_x^2+\varphi_y^2)^{\frac{1}{2}}$. We assume that the equation satisfied by the potential

$$a(\varphi_x, \varphi_y)\,\varphi_{xx}+2b(\varphi_x, \varphi_y)\,\varphi_{xy}+c(\varphi_x, \varphi_y)\,\varphi_{yy}=0 \tag{16}$$

is uniformly elliptic for the subsonic flows considered here; that is, a, b, c are bounded and $ac-b^2\geqq\delta>0$. The potential can also be looked upon as a solution of the linear equation

$$a(x, y)\,\varphi_{xx}+2\,b(x, y)\,\varphi_{xy}+c(x, y)\,\varphi_{yy}=0$$

obtained by inserting q into the coefficients of (16). By means of the substitution $u=\varphi_x$, $v=\varphi_y$, this equation can be written as a uniformly elliptic system

$$-v_y=\frac{a}{c}u_x+\frac{2b}{c}u_y, \qquad v_x=u_y,$$

from which it is seen that the conjugate velocity $w=u-iv$ defines a quasi-conformal mapping in the region of flow.

It has been shown (see [6], p. 29) that the velocity vector is Hölder continuous in the neighborhood of streamline arcs having a Hölder continuous tangent. Since this fact is a consequence of the quasi-conformality of the velocity mapping $w(z)$, it follows by inversion that this property remains true at infinity if the streamline has a Hölder continuous tangent at infinity. We infer therefore that the velocity vectors in the flow regions D and $\overline{D}$ approach their free stream values Hölder continuously.

Now let $\psi, \overline{\psi}$ and $\varphi, \overline{\varphi}$ be the stream functions and potentials of the respective flows in $D, \overline{D}$, with $\psi=0$ on γ, $\overline{\psi}=0$ on $\overline{\gamma}$, and $\psi>0$ in D, $\overline{\psi}=0$ in $\overline{D}$. Let $\Psi\equiv\overline{\psi}-\psi$ and $\Phi=\overline{\varphi}-\varphi$. These functions satisfy an elliptic system

$$\Psi_y=A\,\Phi_x+B\,\Phi_y, \qquad -\Psi_x=B\,\Phi_x+C\,\Phi_y \tag{17}$$

which is obtained by application of the mean value theorem:

$$\begin{aligned}\Psi_y=\bar{\varrho}\,\bar{u}-\varrho\,u&=\int_0^1\frac{d}{dt}\left[u'\,\varrho(u', v')\right]dt\\&=\Phi_x\int_0^1\left[\varrho(u', v')+u'\,\varrho_u(u', v')\right]dt+\Phi_y\int_0^1 2u'\,v'\,\frac{d\varrho}{dq^2}(u', v')\,dt\\&=A\,\Phi_x+B\,\Phi_y,\end{aligned}$$

where

$$u'=u+t(\bar{u}-u), \qquad v'=v+t(\bar{v}-v), \qquad 0<t<1.$$

Similarly for the second equation in (17).

It follows from the definition of A, B, and C, that these functions are Hölder continuous at infinity and at P because of the corresponding Hölder properties of $u, v, \bar{u}, \bar{v}$. A linear transformation takes (17) into another system of the same form whose coefficients A, B, C approach $1, 0, 1$ at infinity (Hölder continuously), and we assume that (17) already has this property.

If $\bar{q}_0 > q_0$ it is evident that $\Psi > 0$ in D, whereas if $q_0 = \bar{q}_0$ Lemma 1 is then applicable to the mapping $\Omega(z) = \Psi - i\Phi$ and yields the same conclusion. Namely, $\Psi \geqq 0$ on γ; $\Psi = o(r)$ as $r \to \infty$ (since grad $\Psi \to 0$ at ∞); and finally, $\Omega(z)$ is quasi-conformal in D with a dilatation coefficient that approaches unity Hölder continuously at infinity, and hence satisfies (7). It follows that $\Psi > 0$ throughout D or $\Psi \equiv 0$.

In the latter case the theorem follows trivially, whereas in the former Lemma 2 becomes applicable. To see this, we remark as above that a linear transformation takes (17) into another such system with coefficients that approach 1, 0, 1 Hölder continuously at P, and after a suitable conformal transformation the hypotheses of Lemma 2 are satisfied by the mapping $\Omega = \Psi - i\Phi$. The conclusion of the lemma, in the z-plane, states that $\frac{\partial \Psi}{\partial n}(P) > 0$ and from this follows directly the desired inequality $\bar{q}(P) > q(P)$. Q.E.D.

Asymptotic properties of free surface flows

In order to apply the comparison theorem to flows with free boundaries, in particular to infinite cavity flows, it is necessary to have certain results concerning the asymptotic behavior of the free streamlines, and also to verify that the regularity hypotheses of the comparison theorem are satisfied.

Let φ and ψ be the potential and stream function of a subsonic infinite cavity flow past an obstacle AOB. That is, φ and ψ satisfy (15) in a region D bounded by a curve consisting of the arc AOB and two curves Γ_1, Γ_2 — the free streamlines — extending from A and B respectively to $x = \infty$; $f = \varphi + i\psi$ maps the interior of D homeomorphically onto the full f-plane slit along the positive real axis, the lower edge of the slit corresponding to $OA + \Gamma_1$ and the upper to $OB + \Gamma_2$; on Γ_1, Γ_2, $|\operatorname{grad} \varphi| = \text{const.} = q_0$, and in D, grad $\varphi \to q_0$ at infinity.

We introduce in the usual way the hodograph variables ϑ and λ, where $\vartheta = \arctan(v/u)$ and

$$\lambda = \int_{q_0}^{q} \sqrt{\frac{1}{\varrho} \frac{d(\varrho q)}{dq}} \frac{dq}{q}.$$

With ϑ and λ as independent variables the nonlinear equations (15) are transformed into the linear system

$$\varphi_\vartheta = -K(\lambda)\psi_\lambda, \qquad \varphi_\lambda = K(\lambda)\psi_\vartheta \tag{18}$$

where $K(\lambda)$ is positive and analytic in λ if the density function $\varrho(q^2)$ is also analytic.

In the $\omega = \vartheta + i\lambda$ plane the free streamlines Γ_1, Γ_2 become a segment S of the real axis $\lambda = 0$, the point $z = \infty$ mapping into $\omega = 0$. Since the singularities of solutions $f = \varphi + i\psi$ of (18) are essentially the same as those of analytic functions, it is to be expected, as in the case of incompressible fluids, that f has an expansion at $\omega = 0$ starting with a singular term of order $\omega^{-2/n}$ for some integer $n \geqq 1$. That this is indeed the case is seen as follows.

Equation (18) shows that ω is a quasi-conformal function of f, and hence of $t=1/\sqrt{f}$. Since the mapping from the physical plane to the f-plane, and hence into the upper half t-plane, is one-to-one, with $\lambda=0$ on the free streamline image $\mathrm{Im}\, t=0$, it follows by reflection that ω is a (single-valued) quasi-conformal mapping of the neighborhood of $t=0$, and $\omega(t)$ approaches zero Hölder continuously at $t=0$. Hence, by the representation formula (5), we have $\omega(t)=g(\zeta(t))$, where $g(\zeta)$ is analytic, and $\zeta(t)$ is a quasi-conformal homeomorphism such that $\zeta(0)=0$. Further, since the dilatation of the mapping $\omega(t)$ can be made to satisfy (9) after a suitable affine transformation, it follows that in a neighborhood $|t|\leqq t_0$, $|\zeta(t)/t|$ is bounded from below and above as in (11). Thus, if $g(\zeta)$ has a zero of order n at $\zeta=0$, so that $\omega=c\zeta^n+\cdots$, we see that f has a singularity of order $\omega^{-2/n}$ at $\omega=0$. We conclude from the work of BERS and BERGMAN (cf. [3]) that f has an expansion in powers of $\omega^{2/n}$, $\omega^{-2/n}$ starting with a singular term of order $\omega^{-2/n}$. On $\lambda=0$ we may therefore write

$$\varphi(\vartheta,0)=\frac{P\left(\vartheta^{\frac{2}{n}}\right)}{\vartheta^{\frac{2}{n}}} \tag{19}$$

where $P\left(\vartheta^{\frac{2}{n}}\right)$ is a power series in $\vartheta^{\frac{2}{n}}$ and $P(0)\neq 0$.

The connection between the z-plane and ω-plane is given by

$$x+iy=\int \frac{e^{i\vartheta}}{q}\left(d\varphi+\frac{i}{\varrho}d\psi\right)$$

so that the free streamlines, on which $q=q_0$ and $\psi=0$, are represented parametrically by

$$z(\vartheta)=\frac{1}{q_0}\int e^{i\vartheta}\varphi_\vartheta(\vartheta,0)\,d\vartheta. \tag{20}$$

In the typical and most important case, when $n=1$, (19) gives

$$z(\vartheta)=\text{const.}\left(\frac{1}{\vartheta^2}+\frac{2i}{\vartheta}+\log|\vartheta|+\cdots\right), \tag{21}$$

showing that the free streamlines are asymptotic to a parabola,

$$y=C\,x^{\frac{1}{2}}, \tag{22}$$

just as in the theory of incompressible fluids. The fact that the free streamlines have a Hölder continuous tangent at infinity follows directly from (21). The asymptotic behavior when $n>1$ is found in the same way by inserting (19) into (20). In symmetric flow, the free streamlines are asymptotic to the curves

$$y^2=\text{const.}\,x^{-2k+1}, \qquad k=0,1,2,\ldots.$$

All results based on the comparison theorem and on the asymptotic behavior of the free streamlines — in particular the uniqueness of the infinite cavity — now carry over from incompressible fluids to subsonic flows.

An alternative derivation of the asymptotic shape (22) of the free stream lines was first obtained by P. Berg [2], in connection with his proof of existence of subsonic cavity flows. We remark that a simpler form of the preceding argument yields the analyticity of the free boundaries at all finite points. The behavior of the free streamlines at detachment from a fixed boundary can be discussed as in the incompressible case (see [5]), with only slight modifications based on the representation formula (5). The explicit dependence of the hydrodynamic force on the shape factor C in (22) can be derived from momentum considerations by means of the asymptotic flow properties described above.

References

[1] Belinskii, P.: Behavior of a quasi-conformal mapping at an isolated singular point. L'vov. Gos. Univ. Uč. Zap. 29, Ser. Meh.-Mat. no. 6, 58—70 (1954). — [2] Berg, P.: On the existence of Helmholtz flows of a compressible fluid. Comm. Pure Appl. Math. (to appear). — [3] Bers, L.: Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics. New York: John Wiley 1958. — [4] Bers, L., and L. Nirenberg: On a representation theorem for linear elliptic systems with discontinuous coefficients and its applications. Atti del Convegno Internaz. sulle Equazioni alle Derivate Parziali, 111—140, Trieste 1954. — [5] Birkhoff, G., and E. Zarantonello: Jets, Wakes, and Cavities. New York: Academic Press 1956. — [6] Finn, R., and D. Gilbarg: Asymptotic behavior and uniqueness of plane subsonic flows. Comm. Pure Appl. Math. **10**, 23—63 (1957). — [7] Finn, R., and J. Serrin: On the Hölder continuity of quasi-conformal and elliptic mappings. Trans. Amer. Math. Soc. **89**, 1—15 (1958). — [8] Gilbarg, D.: The Phragmén-Lindelöf theorem for elliptic partial differential equations. J. Rational Mech. Anal. **1**, 411—417 (1952). — [9] Gilbarg, D.: Jets and cavities. Encyclopedia of Physics, vol. 9. Heidelberg: Springer (to appear). — [10] Gilbarg, D.: Comparison methods in the theory of subsonic flows. J. Rational Mech. Anal. **2**, 233—251 (1953). — [11] Gilbarg, D., and J. Serrin: On isolated singularities of solutions of second order elliptic differential equations. J. d'Analyse Math. **4**, 309—340 (1955). — [12] Hopf, E.: A remark on linear elliptic differential equations of the second order. Proc. Amer. Math. Soc. **3**, 791—793 (1952). — [13] Morrey, C. B.: On the solutions of quasilinear elliptic partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 126—166 (1938). — [14] Pfluger, A.: Quelques théorèmes sur une classe de fonctions pseudo-analytiques. C. R. Acad. Sci. Paris **231**, 1022—1023 (1950). — [15] Teichmüller, O.: Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildungen. Deutsche Math. **3**, 621—678 (1938). — [16] Wittich, H.: Zum Beweis eines Satzes über quasikonforme Abbildungen. Math. Z. **51**, 278—288 (1948).

Dept. of Math., Stanford University, Stanford, Cal. (U.S.A.)

(Eingegangen am 18. April 1959)

NEHARI, Z.
Math. Zeitschr. 72, 175—183 (1959)

On a class of nonlinear integral equations

In memoriam LEON LICHTENSTEIN

By
ZEEV NEHARI

1. The nonlinear integral equations to be considered in this paper are of the form

$$y(x) = \int_a^b K(x,t)\, y(t)\, F[y^2(t), t]\, dt, \tag{1}$$

where $K(x,t)$ is a symmetric, positive-definite kernel which is continuous for $x, t \in [a,b]$. Equation (1) is a special case of the more general equation

$$y(x) = \int_a^b K(x,t)\, \varphi[y(t), t]\, dt \tag{2}$$

treated by HAMMERSTEIN in the fundamental paper on the subject [3]. The special form (1) of equation (2) is suggested by the requirements — which are natural in many physical problems leading to equations of this type — that $y(x) \equiv 0$ be a solution of the equation, and that $-y(x)$ be a solution if the same is true of $y(x)$. We shall further assume that the function $F(u,x)$ is positive and continuous for $x \in [a,b]$ and $u \in [0,\infty]$, and that $F(u,x)$ increases monotonically with u for constant x.

In the literature on equation (2) [e.g. 1, 2, 3, 4, 5], the existence of a solution of (2) has been proved under a number of different assumptions regarding the nature of the function $\varphi(y,x)$. Most of the assumptions used in this work have the effect of preventing a too radical departure of $\varphi(y,x)$ from a linear function in y. In the present paper we shall adopt a different course and investigate the effect on the equation of a "strong" non-linearity of the function $yF(y^2,x)$. Such a non-linearity will be produced by the assumption

$$u_1^{-\varepsilon} F(u_1, x) < u_2^{-\varepsilon} F(u_2, x), \qquad (0 < u_1 < u_2 < \infty) \tag{3}$$

where ε is a fixed positive number. As an example of an equation satisfying these conditions we may mention

$$y(x) = \int_a^b K(x,t)\, p(t)\, y^{2n+1}(t)\, dt, \tag{4}$$

where $p(x)$ is continuous and positive in $[a,b]$ and n is a positive integer.

This research was supported by the United States Air Force Office of Scientific Research.

The following theorem shows that, under the assumptions made, equation (1) has a non-trivial solution, i.e., a solution which does not reduce to $y(x) \equiv 0$. It will then be shown that this result remains true if $yF(y^2, x)$ also contains a linear term, provided the latter is properly restricted. In general, these solutions will not be unique. As the example of the differential system

$$y'' + p(x)\, y^{2n+1} = 0, \qquad y(a) = y(b) = 0$$

(which is equivalent to equation (4) with a suitable $K(x, t)$) shows [6], an equation of type (1) may have a discrete infinity of solutions.

THEOREM I. *Let $K(x, t)$ be a symmetric, positive-definite kernel which is continuous for $x, t \in [a, b]$, and let $F(u, x)$ be positive and continuous for $x \in [a, b]$ and $u > 0$. If $F(u, x)$ is moreover subject to condition* (3), *the equation* (1) *has a non-trivial solution which is continuous in $[a, b]$.*

2. The proof will be based on a suitable variational problem. If the function $G(u, x)$ and the functional $J(u, v)$ are defined, respectively, by

$$G(u, x) = \int_0^u F(\eta, x)\, d\eta \tag{5}$$

and

$$J(u, v) = \int_a^b \int_a^b K(x, t)\, u(x)\, F(u^2, x)\, v(t)\, F(v^2, t)\, dx\, dt, \tag{6}$$

the problem in question is

$$H(y) \equiv \int_a^b [y^2 F(y^2, x) - G(y^2, x)]\, dx = \text{min.}, \tag{7'}$$

under the side conditions

$$\int_a^b y^2 F(y^2, x)\, dx = J(y, y), \qquad y(x) \not\equiv 0. \tag{7''}$$

This problem will be considered within the class of functions $y(x)$ which possess a representation

$$y(x) = \int_a^b K(x, t)\, u(t)\, dt, \tag{8}$$

where $u(t)$ is continuous in $[a, b]$.

As a first step, we show that the first condition (7'') is a normalization condition, i.e., if $y(x)$ is an admissible function which is not subject to this identity there exists a positive constant α such that $y_1(x) = \alpha\, y(x)$ satisfies the first condition (7''). To prove this, we have to show that for any function having the representation (8) and not vanishing identically, the equation

$$\alpha^2 \int_a^b y^2 F(\alpha^2 y^2, x)\, dx = J(\alpha y, \alpha y) \tag{9}$$

has a positive root α.

By (8), we have

$$\int_a^b\int_a^b K(x,t)\,u(t)\,y(x)\,F(\alpha^2 y^2, x)\,dt\,dx = \int_a^b y^2 F(\alpha^2 y^2, x)\,dx.$$

From the positive-definite character of $K(x,t)$ it follows that

$$\alpha^2\left(\int_a^b\int_a^b K(x,t)\,u(t)\,y(x)\,F(\alpha^2 y^2, x)\,dt\,dx\right)^2 \leqq J(\alpha y, \alpha y)\int_a^b\int_a^b K(x,t)\,u(x)\,u(t)\,dt\,dx,$$

where J is the functional defined in (6). Hence,

$$\alpha^2\left[\int_a^b y^2 F(\alpha^2 y^2, x)\,dx\right]^2 \leqq J(\alpha y, \alpha y)\int_a^b\int_a^b K(x,t)\,u(x)\,u(t)\,dt\,dx.$$

With the abbreviation

$$A(\alpha) = J(\alpha y, \alpha y)\left[\alpha^2\int_a^b y^2 F(\alpha^2 y^2, x)\,dx\right]^{-1}, \tag{10}$$

this may be written

$$A(\alpha) \geqq C\int_a^b y^2 F(\alpha^2 y^2, x)\,dx,$$

where C is the positive constant defined by

$$C^{-1} = \int_a^b\int_a^b K(x,t)\,u(x)\,u(t)\,dt\,dx.$$

If $\alpha > 1$ we have, by (3), $F(\alpha^2 y^2, x) > \alpha^{2\varepsilon} F(y^2, x)$ and therefore

$$A(\alpha) \geqq C\,\alpha^{2\varepsilon}\int_a^b y^2 F(y^2, x)\,dx.$$

This shows that $A(\alpha)$ can be made arbitrarily large by choosing α large enough.

Our aim is to show that there exists a value α such that $A(\alpha) = 1$; in view of the definition (10) of $A(\alpha)$ this will be equivalent to (9). Since $A(\alpha)$ is evidently a continuous function of α, the existence of such a value will be proved if we can show that $A(\alpha)$ can be made arbitrarily small by a suitable choice of α. It follows from the definition (6) and the Schwarz inequality that

$$J^2(\alpha y, \alpha y) \leqq \int_a^b\int_a^b K^2(x,t)\,F(\alpha^2 y^2, x)\,F(\alpha^2 y^2, t)\,dt\,dx\left(\alpha^2\int_a^b y^2 F(\alpha^2 y^2, x)\,dx\right)^2,$$

i.e.

$$A^2(\alpha) \leqq \int_a^b\int_a^b K^2(x,t)\,F(\alpha^2 y, x)\,F(\alpha^2 y, t)\,dt\,dx.$$

If $\alpha < 1$ it thus follows from (3) that

$$A^2(\alpha) \leqq \alpha^{4\varepsilon}\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)\,F(y^2, x)\,F(y^2, t)\,dt\,dx,$$

and this shows that $A(\alpha)$ will indeed become small if α is taken small enough. In view of what was said before, this proves that it is always possible to choose a positive α such that $\alpha y(x)$ satisfies the first condition (7″).

3. Suppose now that $y(x)$ is an admissible function which satisfies conditions (7''), and define a function $v(x)$ by

$$v(x) = \alpha \int_a^b K(x, t)\, y(t)\, F(y^2, t)\, dt, \tag{11}$$

where α is determined by the condition that $v(x)$ have the normalization (7''), i.e.,

$$\int_a^b v^2 F(v^2, x)\, dx = J(v, v). \tag{12}$$

By (11), (6), and (7''), we have

$$\int_a^b v(x)\, y(x)\, F(y^2, x)\, dx = \alpha \int_a^b y^2 F(y^2, x)\, dx,$$

whence

$$\alpha^2 \Big(\int_a^b y^2 F(y^2, x)\, dx \Big)^2 \leqq \int_a^b v^2(x)\, F(y^2, x)\, dx \int_a^b y^2(x)\, F(y^2, x)\, dx,$$

i.e.

$$\alpha^2 \int_a^b y^2 F(y^2, x)\, dx \leqq \int_a^b v^2(x)\, F(y^2, x)\, dx. \tag{13}$$

It further follows from (11) that

$$\int_a^b v^2(x)\, F(v^2, x)\, dx = \alpha \int_a^b \int_a^b K(x, t)\, y(t)\, v(x)\, F(y^2, t)\, F(v^2, x)\, dt\, dx = \alpha J(y, v).$$

Since, by (7'') and (12),

$$J^2(y, v) \leqq J(y, y)\, J(v, v) = \int_a^b y^2 F(y^2, x)\, dx \int_a^b v^2 F(v^2, x)\, dx,$$

this implies that

$$\int_a^b v^2 F(v^2, x)\, dx \leqq \alpha^2 \int_a^b y^2 F(y^2, x)\, dx.$$

Combining this inequality with (13), we obtain

$$\int_a^b v^2 F(v^2, x)\, dx \leqq \int_a^b v^2 F(y^2, x)\, dx. \tag{14}$$

Since $F(u, x)$ is an increasing function of u, the function $G(u, x)$ defined in (5) is convex in u (for constant x) and we have

$$G(\eta, x) \geqq G(\zeta, x) + (\eta - \zeta) F(\zeta, x) \tag{15}$$

for any positive ζ and η. Hence,

$$G(v^2, x) \geqq G(y^2, x) + (v^2 - y^2) F(y^2, x)$$

and thus, if $H(y)$ denotes the functional (7'),

$$\begin{aligned} H(v) &\leqq \int_a^b [v^2 F(v^2, x) - G(y^2, x) - (v^2 - y^2) F(y^2, x)]\, dx \\ &= H(y) + \int_a^b v^2 [F(v^2, x) - F(y^2, x)]\, dx. \end{aligned}$$

In view of (14), this leads to the inequality

$$H(v) \leqq H(y). \tag{16}$$

This shows that *the transformation* $y(x) \to v(x)$ *given by* (11) *and the normalization condition* (12) *has the effect of diminishing the functional* (7′) *unless* $y(x)$ *is a solution of the integral equation* (1). That the latter is the only case in which we can have equality in (16) follows from the fact that, because of the way the Schwarz inequality was used in the derivation of (14), the sign of equality in (14) is possible only if $y(x)$ and $v(x)$ are proportional. Inserting this in (11) and observing (7″) we find that $y(x)$ is indeed a solution of (1).

We note, incidentally, that the admissibility condition (8) for the extremal problem (7) may be replaced by the condition that $y(x)$ be continuous in $[a, b]$. Indeed, in view of (11), $v(x)$ satisfies (8) automatically if $y(x)$ is continuous, and (16) shows that for the purpose of minimizing (7′) it is sufficient to consider functions $v(x)$ defined by (11) and (12).

4. We next show that, under the conditions (7″), the functional $H(y)$ defined in (7′) has a positive lower bound. By (3) and (5), we have

$$G(\eta, x) = \int_0^\eta F(t, x)\, dt = \int_0^\eta t^\varepsilon [t^{-\varepsilon} F(t, x)]\, dt$$

$$\leqq \eta^{-\varepsilon} F(\eta, x) \int_0^\eta t^\varepsilon\, dt = (1+\varepsilon)^{-1} \eta\, F(\eta, x).$$

Hence,

$$H(y) \equiv \int_a^b [y^2 F(y^2, x) - G(y^2, x)\, dx \geqq \varepsilon (1+\varepsilon)^{-1} \int_a^b y^2 F(y^2, x)\, dx. \tag{17}$$

We proceed to show that the right-hand side of (17) has a positive lower bound. By hypothesis, $K(x, t)$ is continuous for $x, t \in [a, b]$. Hence there exists a positive constant M such that $|K(x, t)| \leqq M$, and it follows from (7″) and (6) that

$$\int_a^b y^2 F(y^2, x)\, dx \leqq M \left[\int_a^b y\, F(y^2, x)\, dx\right]^2 \leqq M \int_a^b F(y^2, x)\, dx \int_a^b y^2 F(y^2, x)\, dx.$$

Since $y(x)$ was assumed not to vanish identically, this implies

$$M^{-1} \leqq \int_a^b F(y^2, x)\, dx. \tag{18}$$

If m is an arbitrary positive constant, we denote by β and γ the subsets of $[a, b]$ in which, respectively, $|y(x)| \leqq m$ and $|y(x)| > m$. We then have

$$\left\{\begin{aligned} \int_a^b F(y^2, x)\, dx &\leqq \int_\beta F(m^2, x)\, dx + m^{-2} \int_\gamma y^2 F(y^2, x)\, dx \\ &\leqq \int_a^b F(m^2, x)\, dx + m^{-2} \int_a^b y^2 F(y^2, x)\, dx. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

According to (3), $\int_a^b F(m^2, x)\,dx$ varies from 0 to ∞ if m ranges over the same interval. There exists therefore a positive constant m, independent of $y(x)$, such that $\int_a^b F(m^2, x)\,dx = (2M)^{-1}$, where M is the constant appearing in (18). It thus follows from (18) and (19) that

$$\int_a^b y^2 F(y^2, x)\,dx \geqq m^2(2M)^{-1} = C_0, \tag{20}$$

where C_0 is a positive constant which is independent of x. Combining this with (17), we finally obtain

$$H(y) \geqq \varepsilon(1+\varepsilon)^{-1} C_0 = C_1 > 0, \tag{21}$$

where the constant C_1 again does not depend on $y(x)$. It may be noted that, if the condition $y(x) \equiv 0$ is dropped, the variational problem (7) has the trivial solution $y(x) \equiv 0$.

5. Let now $y_0(x)$ be a functional which is continuous in $[a, b]$ and satisfies the conditions (7''), and let $\{y_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ be the sequence of functions obtained from $y_0(x)$ by applying successively the procedure indicated by (11) and (12), i.e.,

$$y_{n+1}(x) = \alpha_n \int_a^b K(x, t)\, y_n(t)\, F(y_n^2, t)\,dt, \tag{22}$$

where α_n is determined by

$$\int_a^b y_{n+1}^2 F(y_{n+1}^2, x)\,dx = J(y_{n+1}, y_{n+1}). \tag{23}$$

In view of (16), we have $H(y_{n+1}) \leqq H(y_n)$, and we may therefore conclude from (17) that there exists a positive constant A such that

$$\int_a^b y_n^2 F(y_n^2, x)\,dx \leqq A \tag{24}$$

for all positive n. Since $F(u, x)$ is an increasing function of u, we have

$$0 \leqq \int_a^b (y_{n+1}^2 - y_n^2)\,[F(y_{n+1}^2, x) - F(y_n^2, x)]\,dx,$$

and thus

$$\int_a^b y_{n+1}^2 F(y_n^2, x)\,dx \leqq \int_a^b [y_{n+1}^2 F(y_{n+1}^2) + y_n^2 F(y_n^2, x)]\,dx \leqq 2A.$$

It follows therefore from (13) and (20) that $\alpha_n^2 \leqq 2A C_0^{-1} = B^2$, where B does not depend on n. Applying this to (22), we obtain

$$y_{n+1}^2(x) \leqq B^2 M^2 \Big(\int_a^b |y_n|\, F(y_n^2, t)\,dt\Big)^2 \leqq B^2 M^2 \int_a^b F(y_n^2, t)\,dt \int_a^b y_n^2 F(y_n^2, t)\,dt.$$

Since, by (24) and (19) (with $m=1$),

$$\int_a^b F(y_n^2, t)\, dt \leqq \int_a^b F(1, x)\, dx + A = A_1,$$

this shows the functions $|y_{n+1}(x)|$ are uniformly bounded.

If x_1 and x_2 are two values in $[a, b]$, it follows from (22) that

$$y_{n+1}(x_2) - y_{n+1}(x_1) = \alpha_n \int_a^b [K(x_2, t) - K(x_1, t)]\, y_n F(y_n^2, t)\, dt.$$

In view of the uniform boundedness of the constants α_n and the functions $|y_n(x)|$, there exists a constant A_2, independent of n, such that

$$|y_{n+1}(x_2) - y_{n+1}(x_1)| \leqq A_2 \int_a^b |K(x_2, t) - K(x_1, t)|\, dt.$$

Because of the continuity of $K(x, t)$, this shows that the sequence of functions $\{y_n(x)\}$ is equicontinuous. Since it is also uniformly bounded, there will thus exist a subsequence $y_n(x)$ converging uniformly to a continuous function $y(x)$, which — as shown by (18) — cannot reduce to the constant zero.

It is now easy to show that this function $y(x)$ is a solution of (1). It is, however, not necessarily the solution of the extremal problem (7). To obtain the solution of (7), we begin with a sequence of admissible functions $\{y_{n,0}\}$ for which $\lim_{n\to\infty} H(y_{n,0}) = \lambda - \inf H(y)$, where $H(y)$ is the functional (7′) (we recall that, by (21), $\lambda > 0$). (17) shows that all functions $y_{n,0}(x)$ satisfy the inequality (24) with a suitable constant A. If we now define the sequence $y_{n,1}(x)$, $y_{n,2}(x)$, ... by means of the recursion formula (22) and the normalization condition (23), the preceding argument shows that the diagonal sequence $\{y_{n,n}(x)\}$ is again uniformly bounded and equicontinuous.

Since, by (16), $H(y_{n,m+1}) \leqq H(y_{n,m})$, the limit $y(x)$ of a uniformly converging subsequence must satisfy $H(y) \leqq \lambda$, and therefore $H(y) = \lambda$. If $v(x)$ is the function obtained from $y(x)$ by means of (11) and (12), it follows from (16) and the definition of λ that $H(v) = H(y) = \lambda$. But, as shown in Section 3, this implies that $y(x)$ is a solution of (1). This completes the proof of Theorem I. It was pointed out above that an equation of type (1) may have many solutions. Whether the solution of (1) which yields the solution of the variational problem (7) is unique, remains an open question.

6. As already mentioned, Theorem I can be extended to a somewhat more general type of equation.

THEOREM II. *Let $K(x, t)$, $F(u, x)$, a, b have the same meaning as in Theorem* I, *and let $F_1(u, x) = p(x) + F(u, x)$, where $p(x)$ is continuous and non-negative in $[a, b]$. If $\Lambda > 1$, where Λ is the lowest eigenvalue of the linear integral equation*

$$w(x) = \Lambda \int_a^b K(x, t)\, [p(x)\, p(t)]^{\frac{1}{2}}\, w(t)\, dt, \tag{25}$$

then the equation

$$y(x) = \int_a^b K(x,t)\, y(t)\, F_1(y^2, t)\, dt \tag{26}$$

has a non-trivial continuous solution.

If $G_1(u, x)$ denotes the function obtained from (5) if $F(u, x)$ is replace by $F_1(u, x)$, we have $y^2 F_1(y^2, x) - G_1(y^2, x) = y^2 F(y^2, x) - G(y^2, x)$. Hence the functional (7′) remains unchanged by this substitution. However, t make the variational problem (7) applicable to the present case we hav to show that any non-trivial function represented by (8) can be normalize as indicated in (7″). As pointed out, this amounts to showing the existenc of a positive constant α such that (9) (with F replaced by F_1) is satisfie If we write

$$A_1(\alpha) = J_1(\alpha y, \alpha y)\left[\alpha^2 \int_a^b y^2 F_1(\alpha^2 y^2, x)\, dx\right]^{-1}, \tag{27}$$

where J_1 is defined as in (6) except that F_1 take the place of F, we thus hav to solve the equation $A_1(\alpha) = 1$.

We first remark that, since $K(x, t)$ is positive-definite and $F_1(u, x) = p(x) + F(u, x)$,

$$\{[J(\alpha y, \alpha y)]^{\frac{1}{2}} - \alpha [J_0(y, y)]^{\frac{1}{2}}\}^2 \leqq J_1(\alpha y, \alpha y) \leqq \{[J(\alpha y, \alpha y)]^{\frac{1}{2}} + \alpha [J_0(y, y)]^{\frac{1}{2}}\}^2,$$

where

$$J_0(y, y) = \int_a^b \int_a^b K(x,t)\, p(x)\, p(t)\, y(x)\, y(t)\, dt\, dx. \tag{28}$$

Using the quantity $A(\alpha)$ defined in (10), we may write this pair of inequalitie in the form

$$\left\{\begin{aligned} &\left\{A^{\frac{1}{2}}(\alpha)\left[\int_a^b y^2 F(\alpha^2 y^2, x)\, dx\right]^{\frac{1}{2}} - [J_0(y, y)]^{\frac{1}{2}}\right\}^2 \\ &\qquad \leqq A_1(\alpha)\left[\int_a^b p(x)\, y^2\, dx + \int_a^b y^2 F(\alpha^2 y^2, x)\, dx\right] \\ &\qquad \leqq \left\{A^{\frac{1}{2}}(\alpha)\left[\int_a^b y^2 F(\alpha^2 y^2, x)\, dx\right]^{\frac{1}{2}} + [J_0(y, y)]^{\frac{1}{2}}\right\}^2, \end{aligned}\right. \tag{29}$$

where $A_1(\alpha)$ is given by (27). As shown in Section 2, both $A(\alpha)$ an $\int_a^b y^2 F(\alpha^2 y^2, x)\, dx$ can be made arbitrarily large by choosing a sufficientl large α, and it follows therefore from the left-hand inequality (29) that $A_1(\alpha) \to \infty$ for $\alpha \to \infty$. As likewise shown in Section 2, the two expressions just mentione tend to zero for $\alpha \to 0$. For $\alpha \to 0$, the right-hand inequality (29) will therefor reduce to

$$\limsup_{\alpha \to 0} A_1(\alpha) \leqq J_0(y, y)\left[\int_a^b p(x)\, y^2\, dx\right]^{-1}, \tag{30}$$

where $J_0(y, y)$ is given by (28).

By classical results, the right-hand side of (30) cannot exceed the value λ^{-1}, where λ is the lowest eigenvalue of the linear integral equation (25). Since, by hypothesis, $\lambda > 1$, we may therefore conclude from (30) that $A_1(\alpha)$ is — for small positive α — capable of values smaller than 1. In view of the fact that $A_1(\alpha) \to \infty$ for $\alpha \to \infty$, it therefore follows from the continuity of $A_1(\alpha)$ that the equation $A_1(\alpha) = 1$ indeed has a positive solution. As remarked above, this is equivalent to the possibility of normalizing a non-trivial admissible function so as to satisfy condition (7″) (with F replaced by F_1).

The remainder of the proof of Theorem II is identical with that of Theorem I.

References

[1] Dolph, C. L.: Nonlinear integral equations of the Hammerstein type. Trans. Amer. Math. Soc. **66**, 289–307 (1949). — [2] Golomb, M.: Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen. Math. Z. **39**, 45–75 (1935). — [3] Hammerstein, A.: Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen. Acta Math. **54**, 117–176 (1930). — [4] Iglisch, R.: Existenz- und Eindeutigkeitssätze bei nichtlinearen Integralgleichungen. Math. Ann. **108**, 161–189 (1933). — [5] Krasnosel'skii, M. A.: Some problems of nonlinear analysis. Uspehi Mat. Nauk (N. S.) **9**, no. 3 (61), 57–114 (1954). — Amer. Math. Soc. Translations, Ser. 2, **10**, 57–114 (1958). — [6] Moore, R. A., and Z. Nehari: Non-oscillation theorems for a class of non-linear differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. **93**, 30–52 (1959).

Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh, Pa. (U.S.A.)

(Eingegangen am 21. Mai 1959)

MALGRANGE, B.
Math. Zeitschr. 72, 184—186 (1959)

Sur une inégalité de F. Treves

A la mémoire de LEON LICHTENSTEIN

Par

BERNARD MALGRANGE

1. Nous commencerons par étendre aux distributions à support compa [4] une identité démontrée par TREVES pour les opérateurs différentiels coefficients constants ([6], chap. 4). Soit $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{E}'$) l'espace des fonctio indéfiniment dérivables (resp. l'espace des distributions) à support compa de n variables réelles $x=(x_1, \ldots, x_n)$. Nous utiliserons les notations suivante $x^2=\sum x_i^2$, $xy=\sum x_i y_i$; en outre, k désignant un ensemble de n entiers $\geqq$ $(k_1, \ldots, k_n)$ nous poserons $|k|=k_1+\cdots+k_n$, $k!=k_1!\ldots k_n!$, $x^k=x_1^{k_1}\ldots x$ Enfin, nous noterons $\int \mu(x)\,\varphi(x)\,dx$ le produit scalaire de $\mu\in\mathscr{E}'$ avec $\varphi\in$

Soit alors $\mu\in\mathscr{E}'$, et soit μ^* la distribution $\overline{\mu(-x)}$. A μ, nous associero les deux noyaux [5] suivants (adjoints l'un de l'autre):

$$\psi \to S(\mu)\,\psi = e^{\frac{x^2}{4}}\left(\mu * e^{-\frac{x^2}{4}}\,\psi\right); \qquad \psi \to T(\mu)\,\psi = e^{-\frac{x^2}{4}}\left(\mu^* * e^{\frac{x^2}{4}}\,\psi\right) \qquad (\psi\in\mathscr{D}$$

Pour tout $x\in R^n$, on trouve immédiatement

$$[S(\mu)\,\psi]\,(x) = \int e^{\frac{xy}{2}-\frac{y^2}{4}}\,\mu(y)\,\psi(x-y)\,dy$$

$$[T(\mu)\,\psi]\,(x) = \int e^{\frac{xy}{2}+\frac{y^2}{4}}\,\overline{\mu(y)}\,\psi(x+y)\,dy.$$

Posons, pour tout $\varphi\in\mathscr{D}$: $\|\varphi\|^2=\int|\varphi|^2\,dx$. Nous avons alors:

$$\|S(\mu)\,\psi\|^2 = \int e^{\frac{xy}{2}+\frac{xz}{2}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}}\,\mu(y)\,\overline{\mu(z)}\,\psi(x-y)\,\overline{\psi(x-z)}\,dx\,dy\,dz$$

d'où, en prenant comme nouvelles variables $u=x-y$, y, z:

$$(1)\quad \|S(\mu)\,\psi\|^2 = \int e^{\frac{yz}{2}}\,e^{\frac{uy}{2}+\frac{uz}{2}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}}\,\mu(y)\,\overline{\mu(z)}\,\psi(u)\,\overline{\psi(u+y-z)}\,du\,dy\,d$$

De même;

$$(2)\quad \|T(\mu)\,\psi\|^2 = \int e^{-\frac{yz}{2}}\,e^{\frac{uy}{2}+\frac{uz}{2}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}}\,\mu(y)\,\overline{\mu(z)}\,\psi(u)\,\overline{\psi(u+y-z)}\,du\,dy\,d$$

Remarquons maintenant que l'on a:

$$(3)\qquad e^{\frac{yz}{2}} = e^{-\frac{yz}{2}}\sum_{|k|=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\,y^k\,z^k.$$

Remplaçons dans (1) $e^{\frac{yz}{2}}$ par la série qui figure au second membre de (3); après interversion des signes $\sum$ et $\int$ (ce qui est permis, puisque la série précédente est uniformément absolument convergente sur tout compact, ainsi que les séries dérivées), nous obtiendrons, compte tenu de (2), le

THÉORÈME 1. *Pour tout*

$$\psi \in \mathscr{D}, \qquad ||S(\mu)\psi||^2 = \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{1}{k!} ||T(x^k \mu)\psi||^2.$$

2. TREVES, dans l'article cité, déduit de cette formule une importante inégalité sur les équations aux dérivées partielles à coefficients constants, qui a été utilisée par HÖRMANDER [2] pour étudier «l'unicité du problème de Cauchy». En suivant la même méthode, nous allons en donner une autre application.

Considérons N points distincts $a_1, \ldots, a_N \in R^n$, $a_i \neq 0$, et $N+1$ opérateurs différentiels (à n variables) $D_0, \ldots, D_N$; et prenons pour μ la distribution: $D_0\delta + \sum D_i \delta_{a_i}$ (δ_a = masse $+1$ au point a, $\delta = \delta_0$). L'opérateur $\varphi \to \mu * \varphi$ est alors un opérateur différentiel aux différences finies à coefficients constants.

Soit $P(x)$ un polynome possédant les propriétés suivantes:

a) P s'annule ainsi que toutes ses dérivées d'ordre $\leqq$ (ordre de D_i), au point a_i ($i = 1, \ldots, N$).

b) $P - 1$ s'annule ainsi que toutes ses dérivées d'ordre $\leqq$ (ordre de D_0) à l'origine. On a évidemment $P(x)\mu = D_0\delta$; et, d'après le théorème 1, pour tout $\psi \in \mathscr{D}$:

$$||S(P(x)\mu)\psi||^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} ||T(x^k P(x)\mu)\psi||^2.$$

Dans la série qui figure au second membre, tous les termes sont nuls sauf un nombre fini, puisque $x^k D_0\delta = 0$ lorsque $k >$ (ordre de D_0); or, chaque terme de cette série est évidemment majoré par une combinaison linéaire finie des termes de la série $\sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{1}{k!} ||T(x^k\mu)\psi||^2$. Par conséquent, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\psi \in \mathscr{D}$, on ait: $||S(P(x)\mu)\psi||^2 \leqq C\,||S(\mu)\psi||^2$. Posons maintenant $\psi = e^{-\frac{x^2}{4}}\varphi$: revenant à la définition de μ et $S(\mu)$, cette inégalité s'écrit:

$$\int e^{\frac{x^2}{2}} |D_0\varphi|^2\,dx \leqq C \int e^{\frac{x^2}{2}} |D_0\varphi + \sum D_i \varphi(x - a_i)|^2\,dx$$

pour tout $\varphi \in \mathscr{D}$; changeant un peu les notations, nous obtenons en particulier le

THÉORÈME 2. *Soient b_i N points distincts de R^n et D_i N opérateurs différentiels (à n variables) à coefficients constants. Pour tout compact $K \subset R^n$, il existe une constante $C(K)$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathscr{D}$ à support dans K, on ait:*

$$\sum ||D_i\varphi|| \leqq C(K)\,||\sum D_i \varphi(x - b_i)||.$$

Indiquons, pour terminer, deux conséquences simples de ce résul

a) La comparaison (au sens de HÖRMANDER [1], chap. 2) des opérate différentiels aux différences finies à coefficients constants se ramène immédia ment à celle des opérateurs différentiels à coefficients constants, étu dans [1].

b) Soit g une distribution (non nécessairement à support compact) de forme $\sum D_i h_i$, où les h_i sont des fonctions localement-L^2; il existe une fonct f localement-L^2 telle que l'on ait:

$$\sum D_i f(x - b_i) = g$$

(le raisonnement est calqué sur ceux de [3] chap. 1). D'après [3], ce résul s'applique notamment à toute fonction g localement-L^2.

Bibliographie

[1] HÖRMANDER, L.: On the theory of general partial differential operators. A Math. **94**, 160—248 (1955). — [2] HÖRMANDER, L.: On the uniqueness of the Cau problem. Math. Scand. **6** (1958). — [3] MALGRANGE, B.: Existence et approximation solutions des équations aux dérivées partielles. Ann. Inst. Fourier **6**, 272—354 (1955/56) [4] SCHWARTZ, L.: Théorie des distributions. Paris: Hermann 1950/51. — [5] SCHWA L.: Théorie des noyaux. Proc. Int. Congress Math. 1952. — [6] TREVES, F.: Relati de domination entre opérateurs différentiels. Acta Math. **101**, 1—139 (1959).

Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg (France)

(Eingegangen am 1. Juni 1959)

Jarník, V.
Math. Zeitschr. 72, 187—191 (1959)

Eine Bemerkung über diophantische Approximationen

Leon Lichtenstein zum Gedächtnis

Von

Vojtěch Jarník

Alle Zahlen in dieser Note sind reell. Es sei

$$\Theta = \begin{pmatrix} \vartheta_{11} \dots \vartheta_{1m} \\ \dots\dots \\ \vartheta_{n1} \dots \vartheta_{nm} \end{pmatrix} \tag{1}$$

eine Matrix von $n\,m$ Zahlen. Für $t \geqq 1$ setze man

$$\psi_\Theta(t) = \operatorname*{Min}_{0<x\leqq t} \left(\operatorname*{Max}_{1\leqq i\leqq n} \left| \sum_{j=1}^{m} \vartheta_{ij} x_j + x_{m+i} \right| \right)$$

mit $x = \operatorname{Max}(|x_1|, \dots, |x_m|)$, wobei sich Min nur auf *ganze* Zahlen $x_1, \dots, x_{m+n}$ bezieht. Die Funktion ψ_Θ mißt die Genauigkeit, mit welcher das System

$$\sum_{j=1}^{m} \vartheta_{ij} x_j + x_{m+i} = 0 \qquad (i = 1, \dots, n)$$

in ganzen $x_1, \dots, x_{m+n}$ lösbar ist (mit Ausschluß der trivialen Nullösung). Wir stellen zunächst einige teils triviale, teils bekannte Tatsachen zusammen.

A. Bekanntlich ist $\psi_\Theta(t) < t^{-\frac{m}{n}}$ (vgl. z.B. [1], S. 13).

B. Die Menge derjenigen Θ, für welche $\psi_\Theta(t) = o\left(t^{-\frac{m}{n}}\right)$ $(t \to +\infty)$, hat das Maß Null ([1], S. 92 oder [5], S. 172); solche Θ nennt Khintchine singulär. Dabei wird in dieser Note jede Matrix Θ als Punkt des $n\,m$-dimensionalen Raumes $E^{n\,m}$ mit den Koordinaten $\vartheta_{11}, \vartheta_{12}, \dots, \vartheta_{nm}$ gedeutet.

C. Ist $m = n = 1$, ϑ_{11} irrational, so ist $\psi_\Theta(t) = \Omega(t^{-1})$; man vergleiche dies mit **A** ([1], S. 92 oder [4], S. 172, Satz I).

D. Ein System von Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ $(k \geqq 1)$ heiße *linear unabhängig*, wenn für ganze c_i stets $c_1\alpha_1 + \dots + c_k\alpha_k + c_0 \neq 0$ ist, mit Ausnahme des Falles $c_0 = c_1 = \dots = c_k = 0$. Das System $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ heiße *algebraisch unabhängig*, wenn für jedes Polynom $F(x_1, \dots, x_k)$ mit ganzen Koeffizienten $F(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \neq 0$ ist, solange F nicht das Polynom Null ist.

E. Im Falle $m = 1$, $n > 1$ ist $\limsup_{t\to+\infty} t\psi_\Theta(t) = +\infty$ dann und nur dann, wenn es unter den Zahlen $\vartheta_{11}, \dots, \vartheta_{n1}$ mindestens zwei linear unabhängige gibt (vgl. [3], S. 199, Satz 9; dort erscheint dieses Resultat als eine Folge allgemeinerer Sätze, man kann es aber auch direkt ziemlich einfach beweisen).

F. Falls die ϑ_{ij} in (1) linear unabhängig sind, so ist offenbar $\psi_\Theta(t) > 0$ für jedes $t \geqq 1$.

G. Wenn Ξ aus Θ durch Hinzufügung einer Spalte entsteht, so ist $\psi_\Xi(t) \leqq \psi_\Theta(t)$.

H. Es sei $F(x_1, \ldots, x_p)$ ein Polynom, das in jeder Veränderlichen höchstens vom Grad k ist. Für $i = 1, 2, \ldots, p$ sei N_i eine Menge von $k+1$ Zahlen. Wenn für jedes System $b_1, \ldots, b_p$ mit $b_1 \in N_1, \ldots, b_p \in N_p$ gilt $F(b_1, \ldots, b_p) = 0$, so sind alle Koeffizienten von F gleich Null. Beweis durch Induktion nach p (man entwickle F nach Potenzen von x_p).

J. Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ algebraisch unabhängig. Dann bilden diejenigen α_{k+1} für welche das System $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$ algebraisch abhängig ist, eine abzählbare Menge.

Satz. *Es sei $m \geqq 1$, $n \geqq 1$, $m+n > 2$; $\varphi(t)$ sei positiv und abnehmend für $t \geqq 1$, $\varphi_1(t)$ sei positiv für $t \geqq 1$, $\varphi_1(t) \to +\infty$ für $t \to +\infty$. Es sei $M_{n,m}$ die Menge derjenigen Matrizen* (1), *für welche folgendes gilt:*

I. Das System der Zahlen ϑ_{ij} $(1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq m)$ ist algebraisch unabhängig.

II. Im Falle $m = 1$ ist $\psi_\Theta(t) = O\left(\frac{\varphi_1(t)}{t}\right)$; im Falle $m > 1$ ist $\psi_\Theta(t) = O(\varphi(t))$.

Dann ist $M_{n,m}$ eine nichtleere Menge. Genauer: Ist G eine beliebige nichtleere offene Menge in E^{nm}, so hat die Projektion des Durchschnitts $G \cap M_{n,m}$ auf jede Koordinatenachse die Mächtigkeit des Kontinuums.

Bemerkung. Der Satz zeigt, daß die in **E** für den Fall $m = 1$, $n > 1$ gegebene Abschätzung definitiv ist. Satz und Beweis gelten auch für $m = n = 1$, haben aber dann wegen **A** keinen Wert. Die Existenz von algebraisch unabhängigen ϑ_{ij} mit der Eigenschaft II wurde im Falle $n < m$ von CHABAUTY und LUTZ [2] bewiesen; im Falle $n \geqq m$ bekommen sie weniger vollständige Resultate. Fordert man nur *lineare* Unabhängigkeit, so findet man derartige Existenzsätze bereits bei KHINTCHINE ([4], S. 173—177, vgl. auch [1], S. 94). Zum Unterschied zu den mehr geometrisch gehaltenen Beweisen von KHINTCHINE und CHABAUTY-LUTZ ist der folgende Beweis rein arithmetisch.

Beweis. 1. Die Fälle $m = 1$, $m = 2$. Es seien φ, φ_1 den Voraussetzungen gemäß gegeben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man annehmen, daß $t^{-1}\varphi_1(t)$ für $t \geqq 1$ nicht wächst. In der Tat, man kann offenbar zunächst annehmen, daß $\varphi_1(t) \geqq 1$ für $t \geqq 1$, und dann ersetze man $\varphi_1(t)$ durch

$$\varphi_2(t) = t \cdot \inf_{1 \leqq \tau \leqq t} \tau^{-1} \varphi_1(\tau) \leqq \varphi_1(t).$$

Wegen $\varphi_1(t) \to +\infty$ ist nämlich auch $\varphi_2(t) \to +\infty$; denn, ist $\varphi_1(t) \geqq K > 0$ für $t \geqq C \geqq 1$, so ist

$$\varphi_2(t) \geqq t \cdot \operatorname{Min}\left(\frac{1}{C}, \frac{K}{t}\right) = K \quad \text{für} \quad t \geqq \operatorname{Max}(KC, 1).$$

Man ordne nun alle Polynome $F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ mit ganzzahligen Koeffizienten und mit Ausschluß des Polynoms Null in eine Folge

$$(\mathfrak{F}) \qquad F_1, F_2, F_3, \ldots$$

so, daß jedes derartige Polynom auf unendlich vielen Stellen der Folge auftritt und daß der Grad von F_r in jeder Veränderlichen höchstens gleich r ist. Dann wähle man eine Folge von natürlichen Zahlen

$$q_1 < Q_1 < q_2 < Q_2 < \cdots \tag{2}$$

so, daß für $r = 1, 2, \ldots$ folgendes gilt:

$$\frac{r+1}{q_{r+1}} < \frac{1}{q_r^r Q_r^r}, \tag{3}$$

$$\frac{2(r+1)q_r}{q_{r+1}} < \varphi(Q_r), \quad \frac{2(r+1)Q_r}{Q_{r+1}} < \varphi(q_{r+1}), \tag{4}$$

$$2(r+1)q_r < \varphi_1(q_{r+1}); \tag{5}$$

dazu genügt es, daß (2) hinreichend rasch wächst. Aus (2), (3) folgt noch für $r \geqq 1$

$$\frac{r+2}{Q_{r+2}} < \frac{r+2}{q_{r+2}} < \frac{1}{4Q_{r+1}} < \frac{1}{2}\frac{r+1}{Q_{r+1}}, \quad \frac{r+2}{q_{r+2}} < \frac{1}{4q_{r+1}} < \frac{1}{2}\frac{r+1}{q_{r+1}}. \tag{6}$$

Wir gehen nun von einer bestimmten Folge (2) aus, wählen $2n$ ganze Zahlen $p_{1,i}, P_{1,i}\ (1 \leqq i \leqq n)$ und ordnen jeder Folge

$$\varepsilon_1, \ \varepsilon_2 \ldots \quad (\varepsilon_r = 1 \quad \text{oder} \quad -1) \tag{7}$$

$2n$ Zahlen $\vartheta_i, \eta_i\ (i = 1, \ldots, n)$ auf folgende Weise zu:

Man konstruiere für $r \geqq 2$, $1 \leqq i \leqq n$ ganze Zahlen $p_{r,i}, P_{r,i}$ nach folgender Vorschrift: Sind diese Zahlen für ein $r \geqq 1$ definiert, so wähle man $p_{r+1,i}, P_{r+1,i}$ (vgl. **H**) so, daß

$$\begin{cases} 0 < \varepsilon_r\left(\dfrac{p_{r+1,i}}{q_{r+1}} - \dfrac{p_{r,i}}{q_r}\right) \leqq \dfrac{r+1}{q_{r+1}}, \\ 0 < \varepsilon_r\left(\dfrac{P_{r+1,i}}{Q_{r+1}} - \dfrac{P_{r,i}}{Q_r}\right) \leqq \dfrac{r+1}{Q_{r+1}}, \end{cases} \tag{8}$$

$$F_r\left(\frac{p_{r+1,1}}{q_{r+1}}, \ldots, \frac{p_{r+1,n}}{q_{r+1}}, \frac{P_{r+1,1}}{Q_{r+1}}, \ldots, \frac{P_{r+1,n}}{Q_{r+1}}\right) \neq 0. \tag{9}$$

Dabei denke man sich alle Systeme $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$ (a_i, b_i ganz) von vornherein in eine Folge geordnet, und nehme für $(p_{r+1,1}, \ldots, p_{r+1,n}, P_{r+1,1}, \ldots, P_{r+1,n})$ das erste Glied dieser Folge, für welches (8), (9) gilt, so daß die Zahlen $p_{r+1,i}, P_{r+1,i}\ (1 \leqq i \leqq n)$ durch $p_{11}, \ldots, p_{1n}, P_{11}, \ldots, P_{1n}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ eindeutig bestimmt sind. Man setze dann

$$\vartheta_i = \lim_{r\to\infty} \frac{p_{r,i}}{q_r}, \quad \eta_i = \lim_{r\to\infty} \frac{P_{r,i}}{Q_r},$$

so daß [vgl. (6)]

$$\left|\vartheta_i - \frac{p_{r,i}}{q_r}\right| = \left|\sum_{s=r}^{\infty}\left(\frac{p_{s+1,i}}{q_{s+1}} - \frac{p_{s,i}}{q_s}\right)\right| \leqq \sum_{s=r}^{\infty}\frac{s+1}{q_{s+1}} < 2\frac{r+1}{q_{r+1}} \tag{10}$$

und analog

$$\left|\eta_i - \frac{P_{r,i}}{Q_r}\right| < 2\,\frac{r+1}{Q_{r+1}}. \tag{11}$$

Daraus sieht man:

1. Wenn bei gegebener Folge (2) und bei gegebenen $p_{1,i}$, $P_{1,i}$ statt (7 eine andere Folge $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots$ gewählt wird, wo also für ein $k \geqq 1$ gilt $\varepsilon_k' \neq \varepsilon_k$ $\varepsilon_g' = \varepsilon_g$ für $1 \leqq g < k$, so bekommt man neue Zahlen $p_{r,i}', \vartheta_i', P_{r,i}', \eta_i'$, und es is [vgl. (8), (10), (6)]

$$p_{k,i}' = p_{k,i}, \quad p_{k+1,i}' \neq p_{k+1,i}, \qquad |\vartheta_i' - \vartheta_i| \geqq \frac{1}{q_{k+1}} - 4\,\frac{k+2}{q_{k+2}} > 0,$$

also $\vartheta_i' \neq \vartheta_i$ und ebenso $\eta_i' \neq \eta_i$.

2. Ist G eine nichtleere offene Menge, so kann man durch eine geeignet Wahl von $q_1, p_{1,i}, Q_1, P_{1,i}$ erreichen, daß alle Punkte $(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$ (für alle Folgen (7)) in G liegen. Denn nach (10), (11) ist

$$\left|\vartheta_i - \frac{p_{1,i}}{q_1}\right| < \frac{4}{q_2} < \frac{4}{q_1}, \quad \left|\eta_i - \frac{P_{1,i}}{Q_1}\right| < \frac{4}{Q_1}.$$

3. Man setze

$$\Xi = \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vartheta_n \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{Z} = \begin{pmatrix} \vartheta_1, & \eta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \vartheta_n, & \eta_n \end{pmatrix}.$$

Dann ist für $q_r \leqq t < q_{r+1}$ [nach (10), (5)]

$$\psi_\Xi(t) \leqq \operatorname*{Max}_{1 \leqq i \leqq n} |q_r \vartheta_i - p_{r,i}| < \frac{\varphi_1(q_{r+1})}{q_{r+1}} \leqq \frac{\varphi_1(t)}{t}.$$

Weiter ist [nach (4), (10), (11)] für $q_r \leqq t < Q_r$:

$$\psi_{\mathsf{Z}}(t) \leqq \operatorname*{Max}_{1 \leqq i \leqq n} |q_r \vartheta_i + 0 \cdot \eta_i - p_{r,i}| < \varphi(Q_r) < \varphi(t),$$

und für $Q_r \leqq t < q_{r+1}$:

$$\psi_{\mathsf{Z}}(t) \leqq \operatorname*{Max}_{1 \leqq i \leqq n} |0 \cdot \vartheta_i + Q_r \eta_i - P_{r,i}| < \varphi(q_{r+1}) < \varphi(t).$$

Es bleibt noch übrig, die algebraische Unabhängigkeit der Zahlen $\vartheta_1, \ldots, \vartheta$ $\eta_1, \ldots, \eta_n$ zu beweisen. Es sei also

$$F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \sum a(g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_n)\, x_1^{g_1} \ldots x_n^{g_n}\, y_1^{h_1} \ldots y_n^{h_n}$$

ein Polynom mit ganzzahligen, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten sein Grad in jeder Veränderlichen sei höchstens k. Man setze voraus, da

$$F(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n, \eta_1, \ldots, \eta_n) = 0; \tag{12}$$

daraus wird sich ein Widerspruch ergeben.

Es gibt eine Folge $r_1 < r_2 < r_3 < \cdots$ so, daß $F = F_{r_a}$ für $a = 1, 2, \ldots$ (s. d Folge $(\mathfrak{F})$]. Im Folgenden soll r nur die Zahlen $r_1, r_2, \ldots$ durchlaufen. Bezie

sich O auf $r\to+\infty$, so kann man (12) nach (10), (11) folgendermaßen schreiben:

$$0=\sum a(g_1,\ldots,h_n)\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_{r+1\,i}}{q_{r+1}}+O\left(\frac{r+2}{q_{r+2}}\right)\right)^{g_i}\left(\frac{P_{r+1,i}}{Q_{r+1}}+O\left(\frac{r+2}{Q_{r+2}}\right)\right)^{h_i}$$

$$=F\left(\frac{p_{r+1,1}}{q_{r+1}},\ldots,\frac{p_{r+1,n}}{q_{r+1}},\frac{P_{r+1,1}}{Q_{r+1}},\ldots,\frac{P_{r+1,n}}{Q_{r+1}}\right)+O\left(\frac{r+2}{q_{r+2}}\right).$$

Wegen $F=F_r$ und nach (9) ist der erste Summand rechts von der Gestalt $\frac{c}{q_{r+1}^{nk}\,Q_{r+1}^{nk}}$ ($c\neq 0$ ganz), während nach (3)

$$\frac{r+2}{q_{r+2}}<\frac{1}{q_{r+1}^{r+1}\,Q_{r+1}^{r+1}}$$

ist, was für $r\to+\infty$ den gesuchten Widerspruch liefert.

2. Der Fall $m>2$. Man füge der Matrix $\mathbf{Z}$ nacheinander weitere Glieder hinzu, bis man m Spalten bekommt. Nach **J** kann man es auf „hinreichend viele" Arten so machen, daß das resultierende System algebraisch unabhängig ist; dann benutze man **G**.

Bemerkung 1. Für die Matrizen Ξ aus dem Beweis des Satzes (Fall $m=1$) ist nach (10), (4)

$$\psi_\Xi(q_r)\leqq\frac{2(r+1)\,q_r}{q_{r+1}}<\varphi(Q_r)<\varphi(q_r),$$

so daß

$$\liminf_{t\to+\infty}\frac{\psi_\Xi(t)}{\varphi(t)}<+\infty.$$

Bemerkung 2. Ist $t^{-1}\varphi_1(t)=o\left(t^{-\frac{1}{n}}\right)$ (für $m=1$), bzw. $\varphi(t)=o\left(t^{-\frac{m}{n}}\right)$ (für $m>1$), so ist die Menge $M_{n,m}$ von erster Kategorie in E^{nm}. In der Tat, es sei $N_{T,k}$ die Menge derjenigen Θ, für welche gilt

$$\psi_\Theta(t)\leqq k\,\varphi(t)\qquad\text{für alle } t\geqq T$$

[für $m=1$ schreibe man $t^{-1}\varphi_1(t)$ statt $\varphi(t)$]. Dann ist $N_{T,k}$ abgeschlossen und besteht aus lauter singulären Systemen, hat also (vgl. **B**) das Maß Null. Also ist $N_{T,k}$ nirgendsdicht, und offenbar ist $M_{n,m}<\bigcup_{T=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}N_{T,k}$.

Literatur

[1] Cassels, J. W. S.: An Introducion to Diophantine Approximation. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics 1957. — [2] Chabauty, C., et E. Lutz: Sur les approximations diophantiennes linéaires réelles (I). Problème homogène. Comptes rendus **231**, 887—889 (1950). — [3] Jarník, V.: Zum Khintchineschen „Übertragungssatz". Travaux de l'Institut Mathématique de Tbilissi **3**, 193—216 (1938). — [4] Khintchine, A.: Über eine Klasse linearer diophantischer Approximationen. Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo **50**, 170—195 (1926). — [5] Khintchine, A.: Über die angenäherte Auflösung linearer Gleichungen in ganzen Zahlen. Acta Arithmetica **2**, 161—172 (1937).

Praha II, Ke Karlovu 3 (Tschechoslowakei)

(Eingegangen am 12. Juni 1959)

RADEMACHER, H.
Math. Zeitschr. 72, 192—204 (1959)

On the Phragmén-Lindelöf theorem and some applications*

In memoriam LEON LICHTENSTEIN

By
HANS RADEMACHER

1. One of the most fruitful applications of the Phragmén-Lindelöf theorem occurs in analytic number theory in the discussion of the Riemann zetafunction. In its most frequently used form the theorem is applied to a half-strip and to a single function (cf. LANDAU, Vorlesungen über Zahlentheorie, vol. 2, Satz 404, 405, pp. 48—51). This, however, is not quite general enough for situations encountered e.g. in the theory of character sums and of primes in arithmetic progressions. We need here estimations which are uniform in several parameters for an infinite set of $L(s, \chi)$ or $\zeta(s, \lambda)$-functions, and the whole strip must be considered[1]). It is the purpose of the present paper to provide a suitable refinement of the Phragmén-Lindelöf theorem. The improvement is achieved through the use of certain subharmonic functions. The applications in Theorems 3, 4, 5 concern zetafunctions. But already the results about the Γ-function in Lemmas 1 to 3 are believed to be new.

2. Basic for our arguments is the following

THEOREM 1. *Let a, b, Q, γ, δ be real numbers,*

$$-Q < a < b, \qquad \gamma \leqq \delta. \tag{2.1}$$

Then there exists an analytic function $\varphi(s) = \varphi(s; Q)$, depending also on the parameters a, b, γ, δ, which is regular in the strip

$$S(a, b): \qquad a \leqq \Re(s) \leqq b$$

and such that

$$\begin{cases} |\varphi(a + it; Q)| = |Q + a + it|^{\gamma} \\ |\varphi(b + it; Q)| = |Q + b + it|^{\delta} \end{cases} \tag{2.2}$$

and that for $a \leqq \sigma \leqq b$

$$|\varphi(s; Q)| \geqq |Q + s|^{l(\sigma)} \tag{2.3}$$

where

$$l(\sigma) = \gamma \frac{b - \sigma}{b - a} + \delta \frac{\sigma - a}{b - a}. \tag{2.31}$$

*) This research was supported by the United States Air Force under Contract No. AF 18 (600)—685, monitored by the Office of Scientific Research.

[1]) Such a situation is found e.g. in the discussion of the Hecke functions in [5], Hilfssatz 15, pp. 363—365, where, however, a rather crude treatment if sufficient.

Moreover

$$\varphi(s;\, Q) = O\left(|t|^c\right), \quad |t| \to \infty \tag{2.32}$$

for a certain $c > 0$.

REMARK. Because of (2.1) we have $|Q+s| > 0$ so that (2.3) implies

$$\varphi(s;\, Q) \neq 0. \tag{2.33}$$

It is essential for our further arguments that we have *equality* in (2.2) and that (2.3) holds for all Q with $Q+a>0$.

PROOF. The case $\gamma = \delta$ is trivial since here $\varphi(s;\, Q) = (Q+s)^\gamma = (Q+s)^\delta$ furnishes the solution. Here, and in similar situations later, we take the principal branch of $(Q+s)^\gamma$ in $S(a, b)$, i.e. that one which is real for positive $Q+s$. We can now assume $\gamma < \delta$.

We construct a harmonic function $u(\sigma, t)$ in the strip $S(a, b)$ which fulfills the boundary conditions

$$\begin{cases} u(a, t) = \gamma \log|Q + a + it| = \frac{1}{2}\gamma \log\left((Q+a)^2 + t^2\right) \\ u(b, t) = \delta \log|Q + b + it| = \frac{1}{2}\delta \log\left((Q+b)^2 + t^2\right). \end{cases} \tag{2.4}$$

The boundary problem for $\Delta u = 0$ in a strip is solved by a transformation of the Poission formula for the circle. Let us put

$$\omega(\sigma, t) = \frac{1}{2} \frac{\sin \pi\sigma}{\cosh \pi t - \cos \pi\sigma}. \tag{2.51}$$

Then

$$u(\sigma, t) = \frac{1}{b-a} \int_{-\infty}^{\infty} \omega\left(\frac{\sigma - a}{b-a},\ \frac{t-y}{b-a}\right) A(y)\, dy + \\ + \frac{1}{b-a} \int_{-\infty}^{\infty} \omega\left(\frac{b-\sigma}{b-a},\ \frac{t-y}{b-a}\right) B(y)\, dy \tag{2.52}$$

satisfies $\Delta(u) = 0$ in the interior of $S(a, b)$ with the boundary conditions

$$u(a, t) = A(t), \quad u(b, t) = B(t), \tag{2.53}$$

where $A(t)$, $B(t)$ are supposed to be continuous and $e^{-\frac{\pi|t|}{b-a}}|A(t)|$, $e^{-\frac{\pi|t|}{b-a}}|B(t)|$ integrable in the interval $(-\infty, \infty)$. (Cf [2], p. 550.)

Taking

$$A(t) = \gamma \log|Q + a + it|, \quad B(t) = \delta \log|Q + b + it|, \tag{2.6}$$

we have in (2.52) a solution of the boundary problem (2.4).

From (2.51), (2.52) (2.6) it follows by a simple estimation that

$$u(\sigma, t) = O\left(\log(2 + |t|)\right) \tag{2.7}$$

in the strip $S(a, b)$ uniformly in σ, although not in Q.

Let now $v(\sigma, t)$ be a conjugate harmonic function to $u(\sigma, t)$. Since $u(\sigma, t)$ in view of the boundary conditions (2.4) is evidently symmetric with respect to the σ-axis, $v(\sigma, t)$ must be constant for $t=0$, and we can normalize $v(\sigma, t)$ through an additive constant so that $v(\sigma, 0)=0$. We put now

$$\varphi(s; Q) = \exp\big(u(\sigma, t) + iv(\sigma, t)\big) \tag{2.8}$$

which is a regular analytic function of $s=\sigma+it$ with the absolute value

$$|\varphi(s; Q)| = \exp u(\sigma, t). \tag{2.81}$$

The boundary conditions (2.4) show that (2.2) is satisfied. Also satisfied is (2.32) because of (2.7).

In order to finish the proof of Theorem 1 we consider the function

$$U(\sigma, t) = (\lambda\sigma + \mu)\log|Q+\sigma+it| = (\lambda\sigma+\mu)\log|Q+s|. \tag{2.9}$$

We have

$$\Delta U = 2\lambda\frac{Q+\sigma}{(Q+\sigma)^2+t^2}, \tag{2.91}$$

which is easily seen, since $U(\sigma, t)=f\cdot g$ and $\Delta U = f\cdot\Delta g + 2(f_\sigma g_\sigma + f_t g_t) + g\cdot\Delta f$ where Δg, Δf and f_t obviously vanish. We choose now the constants λ and μ so that $U(\sigma, t)$ also satisfies the boundary conditions (2.4) i.e.

$$\lambda a + \mu = \gamma, \qquad \lambda b + \mu = \delta$$

or

$$\lambda = \frac{\delta-\gamma}{b-a}, \qquad \mu = \frac{\gamma b - \delta a}{b-a}. \tag{2.92}$$

The conditions (2.1) show then that

$$\lambda > 0.$$

(since we consider here only $\gamma<\delta$), and therefore in virtue of (2.91) and $Q+\sigma>0$

$$\Delta U > 0.$$

In other words, $U(\sigma, t)$ is a *subharmonic* function in the strip $S(a, b)$. It has the same boundary values as the harmonic function $u(\sigma, t)$, and therefore we conclude

$$U(\sigma, t) \leqq u(\sigma, t)$$

in $S(a, b)$. This inequality for the infinite strip $S(a, b)$ is obtained by an application of the Phragmén-Lindelöf argument to the subharmonic function $D(\sigma, t)=U(\sigma, t)-u(\sigma, t)$ which, in view of (2.7) and (2.9), has the property $D(\sigma, t)=O(|t|^c)$, $|t|\to\infty$, in $S(a, b)$. But then it follows from (2.81) that

$$|\varphi(s; Q)| \geqq \exp U(\sigma, t).$$

If we take into account (2.9) and (2.92) we see that this inequality is exactly (2.3). This concludes the proof of Theorem 1.

3. We use this theorem now to prove the following one, which is of the Phragmén-Lindelöf type:

THEOREM 2. *Let $f(s)$ be regular analytic in the strip $S(a, b)$ and satisfy for certain positive constants c, C*

$$|f(s)| < C e^{|t|^c}. \tag{3.1}$$

Suppose moreover that

$$\begin{cases} |f(a+it)| \leqq A|Q+a+it|^{\alpha} \\ |f(b+it)| \leqq B|Q+b+it|^{\beta} \end{cases} \tag{3.2}$$

with

$$Q+a>0, \tag{3.31}$$

$$\alpha \geqq \beta. \tag{3.32}$$

Then in the strip $S(a, b)$

$$|f(s)| \leqq \left(A|Q+s|^{\alpha}\right)^{\frac{b-\sigma}{b-a}} \left(B|Q+s|^{\beta}\right)^{\frac{\sigma-a}{b-a}}. \tag{3.4}$$

REMARK. It will be noticed that no constants enter into (3.4) which do not already appear in the conditions (3.2)

PROOF. We consider the function $\varphi(s; Q)$ of Theorem 1 with the parameter values

$$\gamma = -\alpha, \qquad \delta = -\beta, \tag{3.5}$$

which in view of (3.32) satisfy (2.1). Then we form the regular function

$$F(s) = f(s)\,\varphi(s; Q)\,E^{-1}e^{-\nu s}, \tag{3.6}$$

where E and ν are so determined that

$$A = E e^{\nu a}, \qquad B = e^{\nu b}. \tag{3.7}$$

We see that because of (3.1) and (2.32) an estimate

$$|F(s)| < C^{|t|^c} \tag{3.8}$$

holds with suitable positive c, C. Now the conditions (3.2), (3.5), (3.7) give together with (2.2) the boundary conditions for $F(s)$:

$$|F(a+it)| \leqq 1, \qquad |F(b+it)| \leqq 1.$$

The well-known Phragmén-Lindelöf argument, admissible in view of (3.8), applied on the rectangle $a \leqq \sigma \leqq b$, $|t| \leqq T$, $T \to \infty$, shows that

$$|F(s)| \leqq 1$$

throughout $S(a, b)$. The definition (3.6) of $F(s)$ shows that this means

$$|f(s)| \leqq E e^{\nu\sigma}|\varphi(s)|^{-1},$$

which because of (2.3), (2.31), (3.5) and (3.7) yields the assertion (3.4) of the theorem.

4. The case $\alpha<\beta$ can also be treated, but the resulting theorem is less concise, since a factor M depending on a, b, α, β, Q appears. We obtain here

THEOREM 2a. *Under the conditions of Theorem 2, except* (3.32) *to be replaced by*

$$\alpha<\beta, \tag{4.1}$$

we have in the strip $S(a, b)$

$$|f(s)| \leqq M_Q^2 \left(A|Q+s|^{\alpha}\right)^{\frac{b-\sigma}{b-a}} \left(B|Q+s|^{\beta}\right)^{\frac{\sigma-a}{b-a}}, \tag{4.2}$$

where

$$M_Q = \operatorname{Max}\left(\left(\frac{a+Q}{b+Q}\right)^{\alpha}, \left(\frac{b+Q}{a+Q}\right)^{\beta}\right). \tag{4.3}$$

The factor M_Q *is a monotone decreasing function of* Q *and*

$$\lim_{Q\to\infty} M_Q = 1. \tag{4.4}$$

PROOF. This theorem is derived from Theorem 2 by the substitutions

$$s' = a+b-s,$$

$$\alpha' = \beta, \qquad \beta' = \alpha, \qquad A' = B, \qquad B' = A.$$

We have again

$$a \leqq \sigma' = \Re(s') \leqq b,$$

and α', β' satisfy condition (3.32) of Theorem 2.

We put

$$g(s') = g(a+b-s) = f(s).$$

Then $g(s')$ satisfies the conditions

$$|g(a+it)| = |f(b-it)| \leqq A'|Q+b+it|^{\alpha'}$$
$$|g(b+it)| = |f(a-it)| \leqq B'|Q+a+it|^{\beta'},$$

which have not yet the form (3.2), a and b being exchanged on the right side of the inequalities. We have, however,

$$\begin{cases} |g(a+it)| \leqq A'|Q+a+it|^{\alpha'} \cdot M_Q \\ |g(b+it)| \leqq B'|Q+b+it|^{\beta'} \cdot M_Q \end{cases} \tag{4.5}$$

with

$$M_Q = \operatorname{Max}_t \left\{ \frac{Q-b-it}{|Q+a+it|}^{\beta}, \frac{Q+a+it}{|Q+b+it|}^{\alpha} \right\}.$$

Now

$$1 \leqq \left|\frac{Q+b+it}{Q+a+it}\right| \leqq \frac{Q+b}{Q+a},$$

so that M_Q takes the form (4.3). Application of Theorem 2 on $g(s')$ with conditions (4.5) now yields in $S(a, b)$

$$|g(s')| \leqq M_Q \left(A'|Q+s'|^{\alpha'}\right)^{\frac{b-\sigma'}{b-a}} \left(B'|Q+s'|^{\beta'}\right)^{\frac{\sigma'-a}{b-a}}$$

or

$$\text{(4.6)}\qquad \begin{cases} |f(s)| \leqq M_Q \left(B\,|\,Q+a+b-s|^{\beta}\right)^{\frac{\sigma-a}{b-a}} \left(A\,|\,Q+a+b-s|^{\alpha}\right)^{\frac{b-\sigma}{b-a}} \\ \quad = M_Q \left(A\,|\,Q+s|^{\alpha}\right)^{\frac{b-\sigma}{b-a}} \left(B\,|\,Q+s|^{\beta}\right)^{\frac{\sigma-a}{b-a}} P_Q(s) \end{cases}$$

with

$$P_Q(s) = \left|\frac{Q+a+b-s}{Q+s}\right|^{\alpha\frac{b-\sigma}{b-a}+\beta\frac{\sigma-a}{b-a}}.$$

But for $a \leqq \sigma \leqq b$, $-\infty < t < \infty$ we have

$$\left(\frac{Q+a}{Q+b}\right)^2 \leqq \frac{(Q+a)^2+t^2}{(Q+b)^2+t^2} \leqq \frac{(Q+a-b-\sigma)^2+t^2}{(Q+\sigma)^2+t^2} \leqq \frac{(Q+b)^2+t^2}{(Q+a)^2+t^2} \leqq \left(\frac{Q+b}{Q+a}\right)^2$$

and thus

$$\text{(4.7)}\qquad \begin{cases} P_Q(s) \leqq \underset{a\leqq\sigma\leqq b}{\operatorname{Max}} \left\{\left(\frac{Q+a}{Q-b}\right)^{\alpha\frac{b-\sigma}{b-a}+\beta\frac{\sigma-a}{b-a}}, \left(\frac{Q+b}{Q+a}\right)^{\alpha\frac{b-\sigma}{b-a}+\beta\frac{\sigma-a}{b-a}}\right\} \\ \quad \leqq \operatorname{Max}\left\{\left(\frac{Q+a}{Q+b}\right)^{\alpha}, \left(\frac{Q+b}{Q+a}\right)^{\beta}\right\} = M_Q. \end{cases}$$

The inequalities (4.6) and (4.7) together prove (4.2) of Theorem 2a. The statement (4.4) es evident from the definition of M_Q.

5. It is fortunate that in the application of our theorems to the theory of Dirichlet series the situation $\alpha \geqq \beta$ of Theorem 2 prevails. We need, however, first some lemmas about Γ-quotients, which are simple consequences of Theorem 2.

LEMMA 1. *For $Q \geqq 0$, $-\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq \frac{1}{2}$ we have*

$$\text{(5.1)}\qquad \left|\frac{\Gamma\left(\frac{Q}{2}+\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{Q}{2}+\frac{s}{2}\right)}\right| \leqq \left(\frac{1}{2}\,|\,Q+1+s|\right)^{\frac{1}{2}-\sigma}.$$

REMARK. Equality holds here for $\sigma = \frac{1}{2}$, any $Q \geqq 0$, and for $\sigma = -\frac{1}{2}$ with $Q = 0$.

PROOF. Let us put $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ and

$$f(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{Q}{2}+\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{Q}{2}+\frac{s}{2}\right)},$$

which is regular in the strip $S(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. We have, because of $|\Gamma(s)| = |\Gamma(\bar{s})|$,

$$\text{(5.2)}\qquad |f(a+it)| = \left|\frac{\Gamma\left(\frac{Q}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{Q}{2}-\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)}\right| = \left|\frac{Q}{2}-\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|Q-\frac{1}{2}+it\right| \leqq \frac{1}{2}\left|Q+\frac{1}{2}+it\right| = \frac{1}{2}\left|Q+1+a+it\right|,$$

and similarly

$$|f(b+it)| = 1.$$

With $\alpha=1$, $\beta=0$ Theorem 2 is applicable with $Q+1$ instead of Q and yield (5.1).

For $Q\geqq\frac{1}{2}$ this lemma can be sharpened to

LEMMA 2. *For* $Q-\frac{1}{2}\geqq 0$, $-\frac{1}{2}\leqq\sigma\leqq\frac{1}{2}$ *the inequality*

$$\left|\frac{\Gamma\left(\frac{Q}{2}+\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{Q}{2}+\frac{s}{2}\right)}\right|\leqq\left(\frac{1}{2}|Q+s|\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \tag{5.4}$$

holds.

REMARK. Equality in (5.3) on both boundaries of $S(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ for all $Q\geqq\frac{1}{2}$

PROOF. The proof is almost the same as the previous one. Only instead of (5.2) we write

$$|f(a+it)|=\tfrac{1}{2}|Q-\tfrac{1}{2}-it|=\tfrac{1}{2}|Q+a+it|,$$

which again permits the application of Theorem 2 for $Q+a=Q-\frac{1}{2}>0$. For $Q-\frac{1}{2}=0$ formula (5.3) follows by a passage to the limit.

LEMMA 3. *For* $Q\geqq 0$, $-\frac{1}{2}\leqq\sigma\leqq\frac{1}{2}$ *we have*

$$\left|\frac{\Gamma(Q+1-s)}{\Gamma(Q+s)}\right|\leqq|Q+1+s|^{1-2\sigma}. \tag{5.4}$$

REMARK. Equality holds here on the boundaries under the same circumstances as in Lemma 1.

PROOF. We have again $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$. For

$$f(s)=\frac{\Gamma(Q+1-s)}{\Gamma(Q-s)}$$

we find easily

$$|f(a+it)|=|Q+\tfrac{1}{2}+it|\cdot|Q-\tfrac{1}{2}+it|\leqq|Q+\tfrac{1}{2}+it|^2=|Q+1+a+it|$$

and

$$|f(b+it)|=1.$$

Theorem 2 with $\alpha=2$, $\beta=0$ and $Q+1$ instead of Q yields immediately (5.4).

6. We apply our results to some classes of L- and ζ-functions. Let $k>1$ be an integer and $\chi(n)$ a primitive character modulo k. For $\sigma>1$ one defines

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}.$$

This function with its analytic continuation is regular in the whole s-plane. For $\eta>0$ we have

$$|L(1+\eta+it,\chi)|\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\eta}}=\zeta(1+\eta). \tag{6.1}$$

On the other hand, $L(s,\chi)$ satisfies the functional equation

$$\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{a+s}{2}\right)L(s,\chi)=\varepsilon(\chi)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{a+1-s}{2}\right)L(1-s,\bar{\chi}),$$

where $\varepsilon(\chi)$ is a certain root of unity depending on χ and $a=0$ or 1 so that

$$\chi(-1)=(-1)^a.$$

We have therefore

$$|L(s,\chi)|=\left(\frac{\pi}{k}\right)^{\sigma-\frac{1}{2}}\left|\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}+\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}+\frac{s}{2}\right)}\right||L(1-s,\bar{\chi})|.$$

For $-\frac{1}{2}\leqq\sigma\leqq\frac{1}{2}$ we apply on the Γ-quotient Lemma 1 or 2 according to the values 0 or 1 of a. This gives

$$|L(s,\chi)|\leqq\left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\sigma-\frac{1}{2}}|1+s|^{\frac{1}{2}-\sigma}|L(1-s,\bar{\chi})|,$$

and in particular for $0<\eta\leqq\frac{1}{2}$

$$|L(-\eta+it,\chi)|\leq\left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\eta+\frac{1}{2}}|1+s|^{\eta+\frac{1}{2}}\zeta(1+\eta). \tag{6.2}$$

From (6.1) and (6.2) we derive then through Theorem 2 the result:

THEOREM 3. *For* $-\frac{1}{2}\leqq-\eta\leqq\sigma\leqq1+\eta\leqq\frac{3}{2}$, *for all moduli* $k>1$ *and all primitive characters* χ *modulo* k *the inequality*

$$|L(s,\chi)|\leqq\left(\frac{k|1+s|}{2\pi}\right)^{\frac{1+\eta-\sigma}{2}}\zeta(1+\eta)$$

holds.

It will be noticed that k and t appear here in the same order of magnitude.

7. The Dedekind zetafunction $\zeta_K(s)$ for the algebraic number field K of degree n is defined for $\sigma>1$ as

$$\zeta_K(s)=\sum_{\mathfrak{a}}\frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}=\prod_{\mathfrak{p}}\frac{1}{1-N(\mathfrak{p})^{-s}},$$

where $\mathfrak{a}$ runs through all ideals and $\mathfrak{p}$ through all prime ideals of K. Any rational prime number p has the prime ideal decomposition

$$(p)=\mathfrak{p}_1^{e_1}\cdots\mathfrak{p}_k^{e_k},$$

$$N(\mathfrak{p}_j)=p^{f_j},$$

so that

$$e_1f_1+\cdots+e_kf_k=n.$$

Therefore we can write

$$\zeta_K(s)=\prod_p\left\{\frac{1}{1-p^{-f_1s}}\cdots\frac{1}{1-p^{-f_ks}}\right\},$$

hence

$$|\zeta_K(s)|\leqq\prod_p\left\{\frac{1}{1-p^{-f_1\sigma}}\cdots\frac{1}{1-p^{-f_k\sigma}}\right\}$$

$$\leqq\prod_p\left\{\frac{1}{1-p^{-\sigma}}\right\}^k\leqq\prod_p\left\{\frac{1}{1-p^{-\sigma}}\right\}^n=\zeta(\sigma)^n$$

or, for $\eta>0$,

$$|\zeta_K(1+\eta+it)| \leqq \zeta(1+\eta)^n \tag{7.1}$$

(which is, of course, a rather crude estimate, since $\zeta_K(s)$ has only a pole of first order at $s=1$). The function $\zeta_K(s)$ satisfies after HECKE the functional equation ([4], p. 74)

$$A^s \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} \Gamma(s)^{r_2} \zeta_K(s) = A^{1-s} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)^{r_1} \Gamma(1-s)^{r_2} \zeta_K(1-s), \tag{7.11}$$

where

$$A = 2^{-r_2} \pi^{-\frac{n}{2}} \sqrt{|d|}, \tag{7.12}$$

and d is the discriminant of the field K, which has among its conjugates r_1 real and $2r_2$ complex fields, $r_1+2r_2=n$.

We have thus

$$|\zeta_K(s)| = A^{1-2\sigma} \left| \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \right|^{r_1} \left| \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)} \right|^{r_2} |\zeta_K(1-s)|$$

and, from Lemmas 1 and 3, for $-\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq \frac{1}{2}$

$$|\zeta_K(s)| \leqq A^{1-2\sigma} \left(\tfrac{1}{2}|1+s|\right)^{r_1(\frac{1}{2}-\sigma)} |1+s|^{r_2(1-2\sigma)} |\zeta_K(1-s)|$$

and in particular for $0<\eta \leqq \frac{1}{2}$, in view of (7.1)

$$|\zeta_K(-\eta+it)| \leqq A^{1+2\eta} 2^{-r_1(\frac{1}{2}+\eta)} |1-\eta+it|^{n(\frac{1}{2}+\eta)} \zeta(1+\eta)^n. \tag{7.2}$$

Theorem 2 can be applied only to regular functions. We consider therefore $\zeta_K(s)\,(s-1)$. From (7.1) and (7.2) we obtain

$$|\zeta_K(1+\eta+it)\,(\eta+it)| < \zeta(1+\eta)^n |1+(1+\eta+it)| \tag{7.31}$$

and

$$\begin{cases} |\zeta_K(-\eta+it)\,(-\eta+it-1)| \\ \qquad \leqq \zeta(1+\eta)^n A^{1+2\eta} 2^{-r_1(\frac{1}{2}+\eta)} \dfrac{1+\eta}{1-\eta} |1-\eta+it|^{n(\frac{1}{2}+\eta)+1} \end{cases} \tag{7.32}$$

since

$$|-\eta+it-1| \leqq \frac{1+\eta}{1-\eta} |1-\eta+it|.$$

From (7.31), (7.32) we infer now by means of Theorem 2 that in the strip $-\eta \leqq \sigma \leqq 1+\eta$

$$|\zeta_K(s)\,(s-1)| \leqq \zeta(1+\eta)^n |1+s| \left\{ A^{1+2\eta} 2^{-r_1(\frac{1}{2}+\eta)} \frac{1+\eta}{1-\eta} |1+s|^{n(\frac{1}{2}+\eta)} \right\}^{\frac{1+\eta-\sigma}{1+2\eta}}.$$

With $1 < \frac{1+\eta}{1-\eta} \leqq 3$ for $0<\eta \leqq \frac{1}{2}$, and with the meaning of A in (7.12) we obtain thus

THEOREM 4. *In the strip $-\eta \leqq \sigma \leqq 1+\eta$, $0<\eta \leqq \frac{1}{2}$, the Dedekind function $\zeta_K(s)$ belonging to the algebraic number field K of degree n and discriminant d satisfies the inequality*

$$|\zeta_K(s)| \leqq 3^{\frac{1+s}{1-s}} \left(|d| \left(\frac{|1+s|}{2\pi} \right)^n \right)^{\frac{1+\eta-\sigma}{2}} \zeta(1+\eta)^n. \tag{7.4}$$

We know through E. ARTIN and R. BRAUER [1] that RIEMANN'S $\zeta(s)$ divides DEDEKIND'S $\zeta_K(s)$ in case K is normal over the rational field. We can use this fact to obtain a sharper version of the previous theorem.

In R. BRAUER'S notation the quotient, which is an entire function, appears as

$$\frac{\zeta_K(s)}{\zeta(s)} = \prod_{\varrho} L(s;\omega_\varrho^*)^{c_\varrho} \tag{7.5}$$

where $c_\varrho > 0$ and the functions under the product sign are L-functions for certain congruence characters ω_ϱ^*. Let us put

$$\sum c_\varrho = q = q(K). \tag{7.51}$$

Included in (7.5) is, in view of the class field theory, the case of Abelian K, for which $c_\varrho = 1$, $q \leqq n-1$. Moreover, as Prof. RICHARD BRAUER pointed out to me in a letter of August 10, 1957, the inequality

$$q \leqq n-1 \tag{7.52}$$

holds also for all normal fields. From (7.5) and (6.1) follows then, for $\eta > 0$

$$\left| \frac{\zeta_K(1+\eta+it)}{\zeta(1+\eta+it)} \right| \leqq \zeta(1+\eta)^{n-1}. \tag{7.53}$$

On the other hand, the functional equation (7.11) of $\zeta_K(s)$ together with that of $\zeta(s)$ furnishes

$$\frac{\zeta_K(s)}{\zeta(s)} = A^{1-2s}\pi^{\frac{1}{2}-s}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\right)^{r_1-1}\left(\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)}\right)^{r_2}\frac{\zeta_K(1-s)}{\zeta(1-s)}. \tag{7.6}$$

If $r_1 \geqq 1$ we obtain from Lemmas 1 and 3, for $-\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq \frac{1}{2}$

$$\left|\frac{\zeta_K(s)}{\zeta(s)}\right| \leqq A^{1-2\sigma}\pi^{\frac{1}{2}-\sigma}\left(\frac{1}{2}|1+s|\right)^{(r_1-1)\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}|1+s|^{r_2(1-\sigma)}\left|\frac{\zeta_K(1-s)}{\zeta(1-s)}\right|$$

and in particular with $0 < \eta \leqq \frac{1}{2}$

$$\left|\frac{\zeta_K(-\eta-it)}{\zeta(-\eta+it)}\right| \leqq A^{1+2\eta}\pi^{\frac{1}{2}+\eta}2^{-(r_1-1)\left(\frac{1}{2}+\eta\right)}|1+s|^{(n-1)\left(\frac{1}{2}+\eta\right)}\zeta(1+\eta)^{n-1}. \tag{7.7}$$

From this and (7.53) we obtain just as before by means of Theorem 2 the estimation

$$\left|\frac{\zeta_K(s)}{\zeta(s)}\right| \leqq \left(|d|\left(\frac{|1+s|}{2\pi}\right)^{n-1}\right)^{\frac{1+\eta-\sigma}{2}}\zeta(1+\eta)^{n-1}, \quad -\eta \leqq \Re(s) \leqq 1+\eta. \tag{7.8}$$

If $r_1 = 0$ we write instead of (7.6)

$$\frac{\zeta_K(s)}{\zeta(s)} = A^{1-2s}\pi^{\frac{1}{2}-s}\left(\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)}\right)^{r_2-1}\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}\frac{\zeta_K(1-s)}{\zeta(1-s)}$$

$$= (2A)^{1-2s}\pi^{\frac{1}{2}-s}\left(\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)}\right)^{r_2-1}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\right)}\frac{\zeta_K(1-s)}{\zeta(1-s)}.$$

The application of Lemmas 1 and 2 yields also here exactly (7.7), and (7.
can then be established as before.

We have thus:

THEOREM 4a. *If K is a normal field over the rational field then in the str*
$-\eta \leqq \sigma \leqq 1+\eta$, $0<\eta \leqq \frac{1}{2}$ *the Dedekind function $\zeta_K(s)$ satisfies*

$$|\zeta_K(s)| \leqq |\zeta(s)| \left(|d| \left(\frac{|1+s|}{2\pi}\right)^{n-1}\right)^{\frac{1+\eta-\sigma}{2}} \zeta(1+\eta)^{n-1}.$$

For Abelian fields the Theorem 4a is a direct consequence of Theorem
because of $c_\varrho = 1$ and because the discriminant d is the product of the co
ductors k_ϱ of the characters ω_ϱ^*.

8. The full strength of the uniformity with respect to the parameter
which Theorem 2 and Lemma 3 show is established only in their applicati
to HECKE's $\zeta(s, \lambda)$-functions.

Let K be any algebraic number field and $\mathfrak{f}$ an ideal in K. The Hec
functions are then defined as

$$\zeta(s, \lambda) = \sum_{\mathfrak{m}} \frac{\lambda(\mathfrak{m})}{N(\mathfrak{m})^s} = \sum_{(\hat{\mu})} \frac{\lambda(\hat{\mu})}{|N(\hat{\mu})|^s}, \qquad \Re(s) > 1, \tag{8.1}$$

where $\mathfrak{m}$ runs over all ideals of K, $\hat{\mu}$ over all corresponding non-associa
ideal numbers, and $\lambda(\mathfrak{m}) = \lambda(\hat{\mu})$ is a "Größencharacter for ideals modulo
defined as

$$\lambda(\hat{\mu}) = \prod_{q=1}^{r_1+r_2} |\hat{\mu}^{(q)}|^{-iv_q} \prod_{p=r_1+1}^{n} \left(\frac{\hat{\mu}^{(p)}}{|\hat{\mu}^{(q)}|}\right)^{a_p} \tag{8.2}$$

where the a_p $(p = r_1+1, \ldots, n)$ are non-negative integers with the conditi
$a_p \cdot a_{p+r_2} = 0$, and the v_q $(q = 1, \ldots, r_1+r_2)$ certain real numbers, who
definition does not concern us here ([3], p. 30 and [5], p. 343).

From (8.1) and (8.2) follows immediately

$$|\zeta(s, \lambda)| \leqq \zeta_K(\sigma), \qquad \sigma > 1. \tag{8.3}$$

We put with HECKE

$$\xi(s, \lambda) = \gamma(\lambda)\, \Gamma(s, \lambda)\, A^s \zeta(s, \lambda),$$

where

$$|\gamma(\lambda)| = 1,$$

$$A^2 = \frac{|d|\, N(\mathfrak{f})}{\pi^n 2^{2r_2}},$$

$$\Gamma(s, \lambda) = \prod_{q=1}^{r_1} \Gamma\left(\frac{a_q + s + iv_q}{2}\right) \cdot \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \Gamma\left(\frac{a_p - a_{p+r_2}}{2} + s + \frac{iv_p}{2}\right).$$

Here the a_q for $q = 1, \ldots r_1$, which are not explicitly mentioned in (8.2), a
0 or 1 and are determined by the character χ belonging to the congruen

group modulo $\mathfrak{f}$ in the narrowest sense and induced by the Größencharacter λ ([3], p. 21). The $\xi(s, \lambda)$-functions with primitive λ-character modulo $\mathfrak{f}$ fulfill a functional equation

$$\xi(s, \lambda) = W(\lambda)\, \xi(1-s, \bar{\lambda}),$$

where $W(\lambda)$ is a certain number of absolute value 1, so that

$$|\zeta(s, \lambda)| = A^{1-2\sigma} \prod_{q=1}^{r_1} \left| \frac{\Gamma\left(\frac{a_q + 1 - s - i v_q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a_q + s + i v_q}{2}\right)} \right| \times$$

$$\times \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \left| \frac{\left(\Gamma \frac{a_p + a_{p+r_2}}{2} + 1 - s - \frac{i v_p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a_p + a_{p+r_2}}{2} + s + \frac{i v_p}{2}\right)} \right| \cdot |\zeta(1-s, \bar{\lambda})|.$$

If we apply on the first product, where $a_q = 0$ or 1, the Lemmas 1 and 2, and on the second product, where $(a_p + a_{p+r_2})$ are unbounded non-negative integers, the Lemma 3, we obtain for $-\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq \frac{1}{2}$

$$|\zeta(s, \lambda)| \leqq A^{1-2\sigma} \prod_{q=1}^{r_1} \left(\frac{1}{2} |1 + s + i v_q|\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \times$$

$$\times \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \left| \frac{a_p + a_{p+r_2}}{2} + 1 + s + \frac{i v_p}{2} \right|^{1-2\sigma} \cdot |\zeta(1-s, \lambda)|$$

and in particular for $s = -\eta + it$, $0 \leqq \eta \leqq \frac{1}{2}$ in virtue of (8.3),

$$(8.4) \quad \begin{cases} |\zeta(-\eta + it, \lambda)| \leqq A^{1+2\eta} \prod_{q=1}^{r_1} \left(\frac{1}{2} |1 - \eta + i(t + v_q)|\right)^{\frac{1}{2}+\eta} \times \\ \qquad \times \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \left| \frac{a_p + a_{p+r_2}}{2} + 1 - \eta + i\left(t + \frac{v_p}{2}\right) \right|^{1+2\eta} \cdot \zeta_K(1+\eta). \end{cases}$$

We have not prepared a theorem which we could apply here directly as we could use Theorem 2 in the previous cases. We construct therefore a function $F(s)$, on which the Phragmén-Lindelöf argument can be applied, out of factors which are furnished by Theorem 1. This theorem yields functions according to the given boundary conditions, and we select, with $a = -\eta$, $b = 1 + \eta$ the two functions

$$\varphi_1(s; 1) \quad \text{with} \quad \gamma = -\tfrac{1}{2} - \eta, \quad \delta = 0$$

and

$$\varphi_2(s; Q) \quad \text{with} \quad \gamma = -1 - 2\eta, \quad \delta = 0$$

which show, in view of (2.3), the properties

$$(8.5) \quad \begin{cases} |\varphi_1(s; 1) \geqq |1 + s|^{-\frac{1}{2}(1+\eta-\sigma)} \\ |\varphi_2(s; Q)| \geqq |Q + s|^{-(1+\eta-\sigma)} \end{cases}$$

for $-\eta \leqq \sigma \leqq 1 + \eta$, $Q - \eta > 0$.

Then

$$F(s) = \zeta(s,\lambda) \cdot \prod_{q=1}^{r_1} \varphi_1(s+iv_q;\,1) \cdot \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \varphi_2\left(s+\frac{iv_p}{2};\,1+\frac{a_p+a_{p+r_2}}{2}\right) \cdot E\,e^{\nu s},$$

where E and ν are so determined that

$$E\,e^{-\nu\eta} = \left(A \cdot 2^{-\frac{r_1}{2}}\right)^{-1-2\eta},$$
$$E\,e^{\nu(1+\eta)} = 1,$$

has because of (8.3) and (8.4) the properties

$$|F(-\eta+it)| \leqq \zeta_K(1+\eta)$$
$$|F(1+\eta+it)| \leqq \zeta_K(1+\eta)$$

and therefore satisfies after PHRAGMÉN and LINDELÖF also

$$|F(s)| \leqq \zeta_K(1+\eta)$$

for $-\eta \leqq \Re(s) \leqq 1+\eta$.

From this we infer, valid in the same strip,

$$|\zeta(s,\lambda)| \leqq \zeta_K(1+\eta) \prod_{q=1}^{r_1} |\varphi_1(s+iv_q;\,1)|^{-1} \times$$
$$\times \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \left|\varphi_2\left(s+\frac{iv_p}{2};\,1+\frac{a_p+a_{p+r_2}}{2}\right)\right|^{-1} \cdot E^{-1} e^{-\nu\sigma}.$$

If we now use (8.5) and take into account also (7.1) we obtain the

THEOREM 5. *Let for the field K of degree n, which is among r_1 real and $2r_2$ imaginary conjugate fields of discriminant d the Hecke function $\zeta(s,\lambda)$ be given by* (8.1) *with primitive Größencharacter $\lambda(\hat{\mu})$ modulo $\mathfrak{f}$ of* (8.2). *Then $\zeta(s,\lambda)$ satisfies in the strip $-\eta \leqq \sigma \leqq 1+\eta$, $0<\eta\leqq\frac{1}{2}$ the inequality*

$$|\zeta(s,\lambda)| \leqq \zeta(1+\eta)^n \left\{\frac{|d|\,N(\mathfrak{f})}{(2\pi)^n} \prod_{q=1}^{r_1} |1+s+iv_q| \times\right.$$
$$\left. \times \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \left|1+\frac{a_p+a_{p+r_2}}{2}+s+\frac{iv_p}{2}\right|^2\right\}^{\frac{1+\eta-\sigma}{2}}.$$

[1] BRAUER, R.: On the zeta-functions of algebraic numberfields. Amer. J. Math. **69**, 243–250 (1947). — [2] HARDY, G. H., A. E. INGHAM and G. POLYA: Theorems concerning mean values of analytic functions. Proc. Royal Soc. London (A) **113**, 542–569 (1927). — [3] HECKE, E.: Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. Math. Z. **6**, 11–51 (1920). — [4] LANDAU, E.: Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale. Leipzig 1918. — [5] RADEMACHER, H.: Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper. III. Math. Z. **27**, 321–426 (1928).

Dept. of Math., University of Pennsylvania, Philadelphia 4, Pa. (U.S.A.)

(Eingegangen am 7. November 1958)

Soeben erschien:

Absolute Analysis

Von F. und R. NEVANLINNA, Helsinki.

(Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften
in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete.

Herausgegeben von R. GRAMMEL, F. HIRZEBRUCH, E. HOPF, H. HOPF, W. MAAK, W. MAGNUS, F. K. SCHMIDT, K. STEIN, B. L. VAN DER WAERDEN. Band 102)

Mit 4 Abbildungen. VIII, 259 Seiten Gr.-8°. 1959. DM 36,—; Ganzleinen DM 39,—

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung.

Lineare Algebra: Der lineare Raum mit reellem Multiplikatorenbereich. Der endlichdimensionale lineare Raum. Lineare Abbildungen. Bilineare und quadratische Funktionen. Multilineare Funktionen. Metrisierung affiner Räume.

Differentialrechnung: Ableitungen und Differentiale. Die Taylorsche Formel. Partielle Differentiation. Implizite Funktionen.

Integralrechnung: Das affine Integral. Der Satz von Stokes. Anwendungen des Stokesschen Satzes.

Differentialgleichungen: Normalsysteme. Die lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Die allgemeine Differentialgleichung erster Ordnung.

Differentialgeometrie: Reguläre Kurven und Flächen. Kurventheorie. Flächentheorie. Vektoren und Tensoren. Integration der Ableitungsformeln. Theorema egregium. Parallelverschiebung. Der Satz von Gauß-Bonnet.

Literaturverzeichnis · Namen- und Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Physik Ein Lehrbuch

Von Wilhelm H. Westphal, Berlin.
Zwanzigste und einundzwanzigste Auflage.
Mit 649 Abbildungen. XIII, 746 Seiten Gr.-8°. 1959. Ganzleinen DM 48,—

INHALTSÜBERSICHT

I. Mechanik der Massenpunkte und der starren Körper: Bewegungslehre (Kinematik). Die Lehre von den Kräften (Dynamik). Die allgemeine Gravitation · II. Physik der Stoffe: Die Materie. Die Elastizität der festen und flüssigen Stoffe. Mechanik ruhender Flüssigkeiten. Mechanik ruhender Gase. Mechanik bewegter Flüssigkeiten und Gase. Schwingungen und Wellen. Schall · III. Wärmelehre: Das Wesen der Wärme. Zustandsgleichungen. Wärmeenergie. Änderungen des Aggregatzustandes. Lösungen. Die drei Hauptsätze der Wärmelehre. Wärme und Arbeit · IV. Elektrostatik: Die elektrostatischen Erscheinungen im Vakuum. Die elektrischen Eigenschaften der Stoffe · V. Elektrische Ströme: Elektrische Ströme in festen Leitern. Elektrische Ströme in flüssigen Leitern. Elektrische Ströme in Gasen · VI. Magnetismus und Elektrodynamik: Magnetische Felder im Vakuum. Die magnetischen Eigenschaften der Stoffe. Elektromagnetische Induktion. Wechselstrom. Elektrische Maschinen. Elektrische Schwingungen und Wellen · VII. Optik und allgemeine Strahlungslehre: Das Wesen des Lichtes. Lichtmessung. Geometrische Optik. Wellenoptik. Das elektromagnetische Spektrum. Strahlungsgesetze · VIII. Relativitätstheorie · IX. Quantentheorie. Atome und Moleküle: Quantentheorie des Lichtes. Quantentheorie der Atome und Moleküle. Quantenmechanik. Physik der Atomkerne · X. Astrophysik und Physik des Weltalls · Schlußwort · Anhang I, II und III · Namen- und Sachverzeichnis.

ZUR INFORMATION

Ein Lehrbuch, von dem 31 Jahre nach seinem ersten Erscheinen nunmehr schon die 20. und 21. Auflage erscheinen, bedarf kaum noch einer besonderen Empfehlung. Ein erheblicher Teil einer ganzen Generation von deutschsprachigen Physikern und anderen Naturwissenschaftlern sowie von Ingenieuren und Medizinern verdankt ihm Wesentliches für sein physikalisches Wissen, und schon lange geht seine wirksamste Propaganda von Mund zu Mund. Aber auch im nicht deutschsprachigen Ausland hat es eine erfreuliche Verbreitung gefunden.

Seine Langlebigkeit verdankt das Buch entscheidend der unermüdlichen Arbeit, die sein Verfasser von Auflage zu Auflage an seine Verbesserung und an die Berücksichtigung der neuesten Forschungsergebnisse gewendet hat. So ist auch die neue Auflage in einzelnen Teilen neu bearbeitet worden. Ein besonderes Interesse verdient wohl der Versuch einer neuen Grundlegung der Mechanik unter Berücksichtigung des heutigen Standes der Naturerkenntnis. Neu bearbeitet sind ferner unter anderem die Abschnitte, in denen die Begriffe der Stoffmenge und des Mol eine Rolle spielen, und die Darstellungen der Versuche von Heinrich Hertz und des Periodischen Systems.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG, Würzburg
Printed in Germany